This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

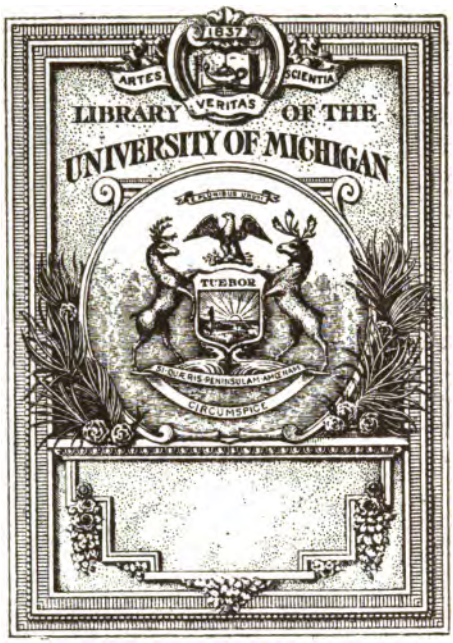
+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Digitized by Google

Mathematics
QA
374
.L98

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

THEORIE

DER

GEDEELTELIJKE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

VAN DE EERSTE ORDE.

Digitized by Google

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIFTERIK HZ.

Digitized by Google

1418

Alexander Ziwet 3.2

THEORIE

DER

GEDEELTELIJKE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

VAN DE EERSTE ORDE.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. G. D. L. HUET,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

op Zaterdag, den 20sten September 1884, des namiddags te 2 uren,

DOOR

Lambertus Petrus Cornelis Luyten,

Civiel Ingenieur.

GEBOREN TE VRIJENBAN.

DELFT,
W. BEETS.
1884.

Digitized by Google

Prof. Alex. Givet
qt.
4-11-1923

Digitized by Google

Math.

4-25-33 MEV

Aan de nagedachtenis mijner Ouders.

421487

Digitized by Google

Digitized by Google

INHOUD.

Hoofdstuk.		Bladz.
I.	Ontstaan der gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen	1
II.	Tangentiale transformaties	8
III.	Toepassing der tangentiale transformaties	15
IV.	Algemeene en afzonderlijke integraal	22
V.	Bijzondere vormen der differentiaalvergelijking	27
VI.	Eigenschappen der homogene tangentiale transformatie	37
VII.	Eigenschappen der algemeene tangentiale transformatie	45
VIII.	Eigenschappen der functies (ϕ, ψ), $[f, g]$	56
IX.	Lineaire differentiaalvergelijkingen	62
X.	Integratie van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen	72
XI.	Methode van CAUCHY	77
XII.	Methode van JACOBI	86
XIII.	Gelijktijdige stelsels	93
XIV.	Methode van JACOBI voor gelijktijdige stelsels	102
XV.	Methode van LIE	107
XVI.	Geschiedkundig overzicht	114
	Litteratuur	122
	Stellingen	125

Digitized by Google

Digitized by Google

EERSTE HOOFDSTUK.

Ontstaan der gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

---

1. *Bepaling volgens* LAGRANGE.

Een gedeeltelijke differentiaalvergelijking van de eerste orde is een betrekking

$$H(z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

tusschen een afhankelijke veranderlijke of functie z, n onafhankelijke veranderlijken $x_1, \ldots . x_n$, en de eerste gedeeltelijke differentiaalquotienten van z naar $x_1, \ldots . x_n$,

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \ldots . p_n = \frac{dz}{dx_n}.$$

Voortaan bedoelen wij met differentiaalvergelijking een gedeeltelijke differentiaalvergelijking van de eerste orde. Homogeen heet zij, als zij in $p_1, \ldots . p_n$ homogeen is. Lineair, als $p_1, \ldots . p_n$ slechts tot den eersten graad daarin voorkomen.

Elke betrekking tusschen z, $x_1, \ldots . x_n$,

$$f(z, x_1, \ldots . x_n) = 0,$$

die zoodanig is, dat de daaruit afgeleide waarden van $z, p_1, \ldots . p_n$ identiek aan (1) voldoen, heet oplossing.

Digitized by Google

Het integreeren eener differentiaalvergelijking (1) bestaat in het vinden van alle oplossingen.

Zijn er meerdere differentiaalvergelijkingen gegeven

$$H_1 = 0, \ldots . H_n = 0, \ldots . \quad (2)$$

dan vormen zij een gelijktijdig stelsel, of kortweg een stelsel; wij bepalen ons tot het geval, dat de functie z in alle dezelfde is.

Integratie bestaat weer in het vinden van alle betrekkingen tusschen $z, x_1, \ldots . x_n$, zoodanig, dat de daaruit afgeleide waarden van $z, p_1, \ldots . p_n$ de vergelijkingen (2) tot identiteiten maken.

2. *Ontstaan der differentiaalvergelijking volgens* LAGRANGE.

Zij

$$f(z, x_1, \ldots . x_n, a_1, \ldots . a_n) = 0 \ldots . \quad (3)$$

een betrekking tusschen $z, x_1, \ldots . x_n$ en n willekeurige standvastigen, dan kan men daaruit, door differentiëeren naar $x_1, \ldots . x_n$, n vergelijkingen afleiden

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \ldots . \frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Tusschen (3) en (4) kan men de n standvastigen elimineeren; hierdoor ontstaat de differentiaalvergelijking

$$H(z, x_1 \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n) = 0, \ldots . \quad (1)$$

waarvan (3) de volledige oplossing heet.

3. *Volledige oplossing.*

Volledig heet een oplossing, indien zij aan geen andere differentiaalvergelijking dan de gegevene voldoet. Dit is blijkbaar met (3) ten opzichte van (1) het geval; daar (1) door (3) geheel bepaald wordt. Een oplossing, waarin n willekeurige onafhankelijke standvastigen voorkomen, is volledig. Bevat eene oplossing minder dan n standvastigen, dan kan zij niet volledig zijn; omdat de eliminatie dezer standvasti-

Digitized by Google

gen, stel m in aantal, uit de vergelijkingen (3) en (4) niet één, maar $n - m$ differentiaalvergelijkingen geeft; aan al deze voldoet de oplossing.

Wij zullen zien, dat men uit elke volledige oplossing alle andere oplossingen kan afleiden; met dien verstande kan men het vinden eener volledige oplossing het integreeren der differentiaalvergelijking noemen.

4. *Integratie volgens* LAGRANGE.

Om een differentiaalvergelijking (1) te integreeren, denke men zich p_n er uit opgelost in de overige grootheden

$$p_n = \pi_n (z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_{n-1}),$$

waardoor

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} + \pi_n dx_n \quad . \quad (5)$$

wordt. Kan men nu $p_1, \ldots . p_{n-1}$ zoodanig als functies van $z, x_1, \ldots . x_n$ bepalen, elk met een willekeurige standvastige, dat (5) of wel

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_{n-1} dx_{n-1} - \pi_n dx_n = 0 \quad . \quad (6)$$

integreerbaar wordt; dan geeft de integratie (waarbij nog een standvastige ingevoerd wordt) de volledige oplossing (3).

Algemeener: Men moet $n - 1$ vergelijkingen vinden tusschen $z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_{n-1}$, die bovendien $n - 1$ willekeurige standvastigen bevatten, zoodat de daaruit afgeleide waarden van $p_1, \ldots . p_{n-1}$ (6) integreerbaar maken; integratie geeft de volledige oplossing.

Of samenvattende: Men moet n vergelijkingen vinden tusschen $z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_{n-1}$ en n standvastigen $a_1, \ldots . a_n$, zoodat de daaruit voor $z, p_1, \ldots . p_{n-1}$ in $x_1, \ldots . x_n, a_1, \ldots . a_n$ gevonden waarden (onafhankelijk van de standvastigen) identiek aan (6) voldoen, d. w. z. onafhankelijk van de waarden der differentialen $dz, dx_1, \ldots . dx_n$.

Denkt men zich deze n vergelijkingen volgens de standvastigen opgelost

$$F_1 = a_1, \ldots . F_n = a_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Digitized by Google

waarbij $F_1, \ldots . F_n$ functies van $z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_{n-1}$ voorstellen; dan kan men zeggen, dat het integreeren van (1) bestaat in het vinden van n functies F, die elk aan een standvastige gelijk gesteld zijnde, $z, p_1, \ldots . p_{n-1}$ zoo bepalen, dat identiek aan (6) voldaan wordt (wat ook de standvastigen zijn). Eliminatie van $p_1, \ldots . p_{n-1}$ uit (7) geeft de volledige oplossing.

5. *Integratie volgens* LIE. *Volledige integraal.*

LIE merkt op, dat, als (6) volgt uit (7), dan (6) ook moet volgen uit de vergelijkingen, die men uit (7) door totale differentiatie afleidt,

$$dF_1 = 0, \ldots . dF_n = 0, \ldots . \quad (8)$$

zonder verder (7) te hulp te roepen; daar dit de standvastigen weer zou invoeren, die in (8) niet meer voorkomen; dus moet het eerste lid van (7) lineair samengesteld zijn uit de eerste leden van (8)

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - \pi_n dx_n = M_1 dF_1 + \ldots + M_n dF_n, \quad (9)$$

waarbij $M_1, \ldots . M_n$ onbekende vermenigvuldigers voorstellen, functies van $z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_{n-1}$.

F en M moeten dus zoodanige functies zijn van $z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$, dat het tweede lid van (9) in het eerste overgaat, als men voor de M en F deze functies substituëert. Heeft men functies M en F gevonden, die (9) tot een identiteit maken, dan heeft men slechts

$$F_1 = a_1, \ldots . F_n = a_n \ldots . \quad (7)$$

te stellen om het eerste lid van (9) nul te maken. Elimineert men $p_1, \ldots . p_{n-1}$, dan vindt men de volledige oplossing

$$f(z, x_1, \ldots . x_n, a_1, \ldots . a_n) = 0 \ldots . \quad (3)$$

Wij zullen (7) de volledige integraal noemen; heeft men deze gevonden, dan beschouwt men de integratie als voltooid, hoewel er alleen nog uitvoerbare bewerkingen (eliminaties) noodig zijn om de oplossing te vinden.

Digitized by Google

6. *Symmetrische integratie.*

Symmetrisch kan men aldus te werk gaan: Men denke zich ook de gegeven differentiaalvergelijking volgens een willekeurige standvastige a opgelost (men brengt een rekenkundige standvastige, of zelfs 0, in het tweede lid, beschouwt deze voorloopig als willekeurige standvastige en vervangt haar na de integratie weer door hare rekenkundige waarde)

$$H = a; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

dan bestaat de integratie in het vinden van n andere functies $H_1, \ldots . H_n$, die, wanneer ze aan willekeurige standvastigen gelijk gesteld worden,

$$H_1 = a_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H_n = a_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

te zamen met (1') $z, p_1, \ldots . p_n$ zoo als functies van $x_1, \ldots . x_n, a_1, \ldots . a_n$ en a bepalen, dat identiek voldaan wordt aan

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

Eliminatie der $p_1, \ldots . p_n$ tusschen (1') en (7') geeft de volledige oplossing (die nog a bevat).

Daar (6') volgt uit (1') en (7'), moet (6') volgen uit hunne totale differentialen

$$dH = 0, \; dH_1 = 0, \; . \; . \; . \; . \; dH_n = 0 \quad . \quad . \quad (8')$$

Het eerste lid van (6') moet dus lineair samengesteld zijn uit de eerste leden van (3')

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = L dH + L_1 dH_1 + \ldots + L_n dH_n, \; (9')$$

waarbij de $L, L_1, \ldots . L_n$ onbekende vermenigvuldigers, functies van z en de x en p zijn.

Zoodra men functies $L, L_1, \ldots . L_n, H, H_1, \ldots . H_n$ gevonden heeft, die (9') tot een identiteit maken, vindt men door $H_1, \ldots . H_n$ aan willekeurige standvastigen gelijk te stellen een volledige integraal

$$H_1 = a_1, \; . \; . \; . \; . \; H_n = a_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

van (a een rekenkundige standvastige zijnde)

Digitized by Google

$$H = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

. De functies $L_1, \ldots . L_n, H_1, \ldots . H_n$ gaan in de $M_1, \ldots . M_n$, $F_1, \ldots . F_n$ van de vorige paragraaf over, indien men p_n vervangt door de waarde uit (1') verkregen, na a door hare rekenkundige waarde vervangen te hebben.

7. *Bepaling volgens* LIE.

Het is niet zeker, zooals wij tot nog toe stilzwijgend ondersteld hebben, dat er, bij eliminatie der p tusschen (7), of wel tusschen (7') en (1'), juist één vergelijking ontstaat; er kunnen even goed meerdere vergelijkingen ontstaan

$$f_1(z, x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n) = 0, \ldots f_k(z, x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n) = 0. \quad (3')$$

Toch blijft (3') de volledige oplossing heeten; maar dan is het begrip gedeeltelijke differentiaalvergelijking uitgebreid. Wij moeten nu zeggen: Een gedeeltelijke differentiaalvergelijking der eerste orde is een betrekking tusschen $2n+1$ grootheden $z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n$, waarvan de integratie bestaat in het vinden van alle betrekkingen tusschen deze grootheden, die met de gegeven vergelijking samen

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

maken. Hiervoor zijn minstens n vergelijkingen noodig. Elk stel van n vergelijkingen, dat hieraan voldoet, heet integraal; bevat het stel n onderling onafhankelijke willekeurige standvastigen, dan heet het volledige integraal.

Eliminatie van $p_1, \ldots . p_n$ tusschen de n vergelijkingen eener integraal en de gegeven vergelijking geeft de overeenkomstige oplossing, die uit $1, 2, \ldots . n$ vergelijkingen kan bestaan, of zelfs uit $n+1$, als de gegeven vergelijking geen der p bevat.

Blijkbaar omvat deze nieuwe bepaling de vroegere als bijzonder geval. Wij noemen een vergelijking, waarin behalve z, n grootheden x en n grootheden p voorkomen, kortweg een vergelijking met n veranderlijken; omdat in het zooeven genoemde bijzondere geval, waarbij de grootheden x onder-

Digitized by Google

ling onafhankelijk zijn, het aantal dier onafhankelijk veranderlijken n is. Ook blijven wij z de functie noemen; zij hangt zeker van de x af; hoewel ook eenige der x van de overige kunnen afhangen, zullen wij enkele malen de x als de onafhankelijke veranderlijken aanduiden.

8. *Gelijktijdig stelsel.*

Denkt men in (9′) niet een, maar meerdere H, gelijk aan rekenkundige getallen gesteld,

$$H = a,\ H_1 = a_1,\ \ldots\ H_{k-1} = a_{k-1},$$

dan vormen zij een gelijktijdig stelsel, waarvan

$$H_k = a_k\ \ldots\ H_n = a_n$$

de volledige integraal heet, die dus $n - k$ willekeurige standvastigen bevat.

Digitized by Google

TWEEDE HOOFDSTUK.

Tangentiale transformaties.

---

1. *Bepaling.*

In I, 6 hebben wij gesproken over het vinden van functies die voldoen aan

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = L dH + L_1 dH_1 + \ldots + L_n dH_n; \quad (1)$$

wanneer men stelt

$$\left.\begin{aligned} H &= Z, \quad H_1 = X_1, \ \ldots \ . \ H_n = X_n, \\ L &= \frac{1}{\rho}, \ \frac{L_1}{L} = -P_1, \quad . \ \frac{L_n}{L} = -P_n, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

kan men symmetrisch schrijven

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = \frac{1}{\rho}(dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n). \quad (2)$$

Dit heet een tangentiale transformatie; hierbij worden $Z, X_1, \ldots . X_n, P_1, \ldots . P_n$ als nieuwe veranderlijken beschouwd. Het vinden van zulke transformaties geeft volstrekt geen bezwaar, wanneer niet een der X gegeven is.

2. *Het vinden van tangentiale transformaties.*

Neemt men toch eenige (hoogstens $n+1$) betrekkingen tusschen de z, x, Z, X aan

Digitized by Google

$$f=0,\ f_1=0,\ \ldots.\ f_k=0;\ \ldots.\quad (4)$$

dan heeft men slechts uit de totale differentialen van (4)

$$df=0,\ df_1=0,\ \ldots.\ df_k=0,\quad \ldots.\quad (5)$$

waarbij

$$df_i=\frac{\partial f_i}{\partial z}\,dz+\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\,dx_1+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\,dx_n+\frac{\partial f_i}{\partial Z}dZ+\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\,dX_1+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial X_n}\,dX_n=0$$

is, $k+1$ der differentialen in de overige uit te drukken, deze waarden daarna in (3) te substitueeren en de coefficienten der overige differentialen (die onderling onafhankelijk moeten zijn, daar wij geen meerdere betrekkingen tusschen z, Z en de x, X onderstellen) nul te stellen. In den regel bereikt men gemakkelijker zijn doel door elke vergelijking (5) met een onbepaalden factor te vermenigvuldigen, en al deze uitkomsten onderling en met (3), na beide leden met ρ vermenigvuldigd te hebben, samen te tellen, en dan al de coefficienten der differentialen in de komende vergelijking nul te stellen. Dit geeft

$$\left.\begin{aligned}
\rho+\mu\frac{\partial f}{\partial z}+\mu_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\ldots+\mu_k\frac{\partial f_k}{\partial z}&=0,\\
-\rho p_1+\mu\frac{\partial f}{\partial x_1}+\mu_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\ldots+\mu_k\frac{\partial f_k}{\partial x_1}&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
-\rho p_n+\mu\frac{\partial f}{\partial x_n}+\mu_1\frac{\partial f_1}{\partial x_n}+\ldots+\mu_k\frac{\partial f_k}{\partial x_n}&=0,\\
-1+\mu\frac{\partial f}{\partial Z}+\mu_1\frac{\partial f_1}{\partial Z}+\ldots+\mu_k\frac{\partial f_k}{\partial Z}&=0,\\
P_1+\mu\frac{\partial f}{\partial X_1}+\mu_1\frac{\partial f_1}{\partial X_1}+\ldots+\mu_k\frac{\partial f_k}{\partial X_1}&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
P_n+\mu\frac{\partial f}{\partial X_n}+\mu_1\frac{\partial f_1}{\partial X_n}+\ldots+\mu_k\frac{\partial f_k}{\partial X_n}&=0.
\end{aligned}\right\}(6)$$

Digitized by Google

De $n+2$ eerste vergelijkingen zijn met (4) voldoende om de μ en $\rho, Z, X_1, \ldots . X_n$ in z en de x, p uit drukken; daarna vindt men de P uit de n laatste vergelijkingen.

2. *Eerste eenvoudige gedaante.*

Indien wij uit (4) z en k der x oplossen in de overige x en in de Z, X

$$z = \Phi, x_1 = \Phi_1, \ldots . x_k = \Phi_k; \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

dan worden de vergelijkingen (6)

$$\begin{aligned} \rho + \mu &= 0, \\ -\rho p_1 + \mu_1 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ -\rho p_k + \mu_k &= 0, \end{aligned}$$

(en deze onmiddellijk gebruikende om uit de volgende de μ te elimineeren)

$$\left.\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_{k+1}} - p_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{k+1}} - \ldots - p_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{k+1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - p_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} - \ldots - p_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_n}, \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial Z} - p_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial Z} - \ldots - p_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial Z}, \\ -\frac{P_1}{\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} - p_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} - \ldots - p_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial X_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\frac{P_n}{\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} - p_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_n} - \ldots - p_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial X_n}, \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

welke vergelijkingen men rechtstreeks had kunnen vinden door de waarden van $dz, dx_1, \ldots . dx_k$ uit (4') afgeleid in (3) te substituëeren en de coefficienten der overige differentialen nul te stellen.

Digitized by Google

2. *Tweede eenvoudige gedaante.*

Indien wij uit (4), $Z, X_1, \ldots . X_k$ in de overige X en in z, x oplossen

$$Z = \psi,\ X_1 = \psi_1, \ldots . X_k = \psi_k \quad . \quad . \quad . \quad (4'')$$

en de korte methode, aan het eind der vorige § aangegeven, toepassen, dan komt er

$$\left.\begin{aligned}
\rho &= \frac{\partial \psi}{\partial z} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial z}, \\
-\rho p_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\rho p_n &= \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}, \\
P_{k+1} &= \frac{\partial \psi}{\partial X_{k+1}} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_{k+1}} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial X_{k+1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n &= \frac{\partial \psi}{\partial X_n} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_n} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial X_n}.
\end{aligned}\right\} \quad (6'')$$

Uit de eerste vergelijkingen vindt men $\rho, P_1, \ldots . P_k, X_{k+1}, \ldots . X_n$; daarna uit de overige $P_{k+1}, \ldots P_n$; eindelijk uit (4'') $Z, X_1, \ldots X_k$, allen in z en de x, p.

5. *Eerste bijzonder geval. Één betrekking.*

Een merkwaardig bijzonder geval is, dat er slechts één betrekking tusschen Z, z en de X, x gegeven is, die in een der drie vormen kan voorkomen

$$f(z, x, Z, X) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$
$$z = \Phi(x, Z, X), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$
$$Z = \psi(z, x, X). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7'')$$

De daaruit afgeleide vergelijkingen zijn

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{ll} \rho + \mu \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, & -1 + \mu \dfrac{\partial f}{\partial Z} = 0, \\ -\rho p_1 + \mu \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, & P_1 + \mu \dfrac{\partial f}{\partial X_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -\rho p_n + \mu \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, & P_n + \mu \dfrac{\partial f}{\partial X_n} = 0, \end{array}\right\} \quad . \quad (8)$$

of

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}, & \dfrac{P_1}{\rho} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_1}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_n = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n}, & \dfrac{P_n}{\rho} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_n}, \\ & \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial Z}, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

of eindelijk

$$\left.\begin{array}{ll} \rho = \dfrac{\partial \psi}{\partial z}, & \\ -\rho p_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}, & P_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial X_1}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\rho p_n = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}, & P_n = \dfrac{\partial \psi}{\partial X_n}. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8'')$$

5. *Afleiding eener differentiaalvergelijking uit de volledige oplossing.*

Blijkkaar is het in de vorige § behandelde niets anders dan het afleiden eener differentiaalvergelijking uit een gegeven volledige oplossing

$$f(z, x_1, \ldots . x_n, a, a_1, \ldots . a_n) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hierin stellen $a, a_1, \ldots . a_{n-1}$ de willekeurige standvastigen voor, terwijl a_n de standvastige is, die in het tweede lid der gezochte differentiaalvergelijking zal voorkomen (deze a_n lieten wij in I, 2 weg); denkt men zich nu uit (9) door differen-

Digitized by Google

tiatie n vergelijkingen afgeleid, en uit deze en (9) $a, a_1, \ldots a_n$ opgelost in z en de x, p,

$$a = Z, \quad a_1 = X_1, \ldots . a_n = X_n; \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dan zal, als men zich die waarden in (9) gesubstitueerd denkt, een betrekking tusschen Z, z en de X, x verkregen zijn, waaruit men volgens de voorgaande § andere kan afleiden, die Z en de X, P in z en de x, p uitdrukken. De eene helft dier vergelijkingen (8) zijn dezelfde als de in I, 2 gevondene, en zijn gelijkwaardig met (10); de andere dienen om P te vinden.

Eveneens blijkt nu, hoe het in § 2, 3 en 4 behandelde gelijkstaat met het afleiden eener differentiaalvergelijking uit een volledige oplossing uit meerdere vergelijkingen bestaande.

Beschouwt men niet alleen a_n, maar meerdere der a, als rekenkundige getallen, dan heeft men een gelijktijdig stelsel uit een volledige oplossing afgeleid.

6. *Tweede bijzonder geval. Lineaire vergelijking.*

Een ander merkwaardig geval is, dat er n vergelijkingen tusschen Z, z en de X, x gegeven zijn, namelijk, ψ als functies van X_n, z en de x, beschouwende,

$$Z = \psi, \quad X_1 = \psi_1, \ldots . X_{n-1} = \psi_{n-1};$$

hieruit leidt men af

$$\left.\begin{aligned}
\rho &= \frac{\partial \psi}{\partial z} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \ldots - P_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z}, \\
-\rho p_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \ldots - P_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\rho p_n &= \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \ldots - P_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}, \\
P_n &= \frac{\partial \psi}{\partial X_n} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_n} - \ldots - P_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial X_n}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Dit geval kan ons dienen tot het afleiden eener differen-

Digitized by Google

tiaalvergelijking uit een volledige oplossing, die uit n vergelijkingen bestaat,

$$a = \psi, \quad a_1 = \psi_1, \ldots . a_{n-1} = \psi_{n-1},$$

waarbij de ψ functies zijn van z de x en a_n. Evenals boven blijkt, dat men uit de $n+1$ eerste vergelijkingen (11) $\rho, P_1, \ldots . P_{n-1}$ en a_n kan vinden; om deze laatste te verkrijgen heeft men uit die vergelijkingen slechts $\rho, P_1, \ldots . P_{n-1}$ te elimineeren; dit geeft den determinant

$$\begin{vmatrix} -1, & \frac{\partial \psi}{\partial z}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z} \\ p_1, & \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n, & \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

hetgeen een vergelijking geeft, die lineair in de p is, en waarin nog a_n voorkomt, die men desverkiezende kan oplossen en in het tweede lid brengen; het eerste lid is dan, hetgeen wij X_n genoemd hebben.

Digitized by Google

DERDE HOOFDSTUK.

Toepassing der tangentiale transformaties.

---

1. *Eerste toepassing. Afleiding van nieuwe volledige integralen uit een gegevene.*

Zij

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1} \ldots \quad (1)$$

een volledige integraal van de differentiaalvergelijking

$$X_n = a_n; \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

zoodat

$$dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{\rho}(dZ - \Sigma P\, dX). \ldots \quad (3)$$

Neemt men nu tusschen Z, de X en $n+1$ nieuwe grootheden $'Z$ en $'X$ willekeurige betrekkingen aan, echter X onveranderd latende, dus $'X_n = X_n$ als een dier betrekkingen beschouwende; dan kan men $'Z$ de $'X, 'P$ zoo als functies van Z, de X, P bepalen, dat

$$dZ - \Sigma P\, dX = \frac{1}{'\rho}(d'Z - \Sigma\, 'P\, d'X);$$

maar dan zijn ook $'Z$ en de $'X, 'P$ zoodanige functies van z en de x, p, dat

$$dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{\rho\, '\rho}(d'Z - \Sigma P'\, d'X);$$

Digitized by Google

waaruit blijkt, dat ook

$$'Z = b, \quad 'X_1 = b_1, \ldots . 'X_{n-1} = b_{n-1}$$

een volledige integraal is van

$$'X_n = a_n \quad \text{of} \quad X_n = a_n.$$

Dezelfde methode is bruikbaar om uit een volledige integraal van een stelsel een nieuwe af te leiden; men laat dan meerdere X onveranderd.

2. *Uit een volledige integraal, die een oplossing in meerdere vergelijkingen geeft, wordt een volledige integraal afgeleid, die een oplossing in één vergelijking geeft.*

Laat de volledige integraal (1) van (2), na eliminatie der p, een volledige oplossing in $k+1$ vergelijkingen geven, die wij oplosbaar onderstellen naar $a, a_1, \ldots . a_k$,

$$a = \psi, \quad a_1 = \psi_1, \ldots . a_k = \psi_k,$$

waarbij de ψ functies van z, de x en $a_k+1, \ldots . a_n$ zijn.

Nu kan men uit de overeenkomstige tangentiale transformatie (3)

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = \frac{1}{\rho}(dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n) \quad (3)$$

een andere afleiden

$$d\,z - p_1\,d\,x_1 - \ldots - p_n\,d\,x_n = \frac{1}{\rho}\{d\,(Z - P_1\,X_1 - \ldots$$

$$\ldots - P_k\,X_k) + X_1\,d\,P_1 + \ldots + X_k\,d\,P_k - P_{k+1}\,d\,X_{k+1} - \ldots$$

$$\ldots - P_n\,d\,X_n\};$$

welke aantoont, dat ook

$$Z - P_1\,X_1 - \ldots - P_k\,X_k = b, \quad P_1 = b_1, \ldots . P_k = b_k,$$

$$X_{k+1} = a_{k+1}, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1}$$

een volledige integraal van (2) is.

Om hieruit de p te elimineeren, kan men vooreerst in de eerste vergelijking $P_1, \ldots . P_k$ door $b_1, \ldots b_k$ vervangen, en daarna door middel van

$$X_{k+1} = a_{k+1}, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = a_n$$

de p elimineeren uit $Z, X_1, \ldots . X_k$; hetgeen volgens de

Digitized by Google

onderstelling mogelijk is; zij worden daardoor $\psi, \psi_1, \ldots . \psi_k$; de volledige oplossing wordt dus

$$\psi - b_1 \psi_1 - \ldots - b_k \psi_k = b,$$

welke volledige oplossing in één vergelijking, behalve de $k+1$ standvastigen $b, b_1, \ldots . b_k$, nog $a_{k+1}, \ldots . a_n$ bevat, die in de ψ voorkomen.

Opmerking. Om volledig bewezen te hebben, dat er werkelijk een oplossing in één vergelijking ontstaat, moeten wij nog aantoonen, dat het niet mogelijk is uit

$$P_1 = b_1, \ldots . P_k = b_k, X_{k+1} = a_{k+1}, \ldots$$
$$\ldots . X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = a_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

een andere vergelijking zonder de p af te leiden. Hiertoe is het noodig, dat wij voor de X, P hunne waarden in z en de x, p invoeren, hetgeen geschiedt door de vergelijkingen (6″) van II, 4. Denkt men zich hierin onmiddellijk de P, X door b, a vervangen, dan komt er

$$\rho = \frac{\partial \psi}{\partial z} - b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \ldots - b_k \frac{\partial \psi_k}{\partial z},$$
$$-\rho p_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \ldots - b_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$-\rho p_n = \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \ldots - b_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}.$$

Deze vergelijkingen, die in anderen vorm dezelfde zijn als (4), toonen duidelijk aan, dat het niet mogelijk is er een vergelijking zonder de p uit af te leiden.

3. *Uit een volledige oplossing in* k + 1 *vergelijkingen wordt een volledige oplossing in één vergelijking afgeleid.*

Uit het bovenstaande blijkt, hoe men uit een volledige oplossing in $k+1$ vergelijkingen,

$$a - \psi = 0, \quad a_1 - \psi_1 = 0, \ldots . a_k - \psi_k = 0,$$

een volledige oplossing in één vergelijking afleidt,

Digitized by Google

$$a - \psi - b_1 (a_1 - \psi_1) - \ldots - b_k (a_k - \psi_k) = 0$$

of $$b - \psi + b_1 \psi_1 + \ldots + b_k \psi_k = 0$$

(waarbij $b = a - b_1 a_1 - \ldots - b_k a_k$ gesteld is).

Wij zullen dit nog duidelijker maken door te laten zien, dat beide dezelfde differentiaalvergelijking geven.

De differentiaalvergelijking, uit de eerste oplossing afgeleid, wordt volgens II, 4 en 6 gevonden door eliminatie van $\rho, P_1, \ldots . P_k, a_{k+1}, \ldots . a_{n-1}$ uit

$$\rho = \frac{\partial \psi}{\partial z} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial z},$$

$$-\rho p_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1},$$

$$-\rho p_n = \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \ldots - P_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}.$$

Die uit de tweede oplossing afgeleid, vindt men volgens II, 5 en 6 door eliminatie van $\rho, b_1, \ldots . b_k, a_{k+1}, \ldots . a_{n-1}$ tusschen

$$\rho = \frac{\partial \psi}{d z} - b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \ldots - b_k \frac{\partial \psi_k}{\partial z},$$

$$-\rho p_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \ldots - b_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1},$$

. . . . . .

$$-\rho p_n = \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \ldots - b_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}.$$

Beide eliminaties geven blijkbaar dezelfde uitkomst.

---

4. *Tweede toepassing. Invoeren van nieuwe veranderlijken.*

Wij gaan in een differentiaalvergelijking (2) nieuwe veranderlijken invoeren, zoodanig dat een volledige integraal (1) van de gegeven vergelijking in een volledige integraal der komende overgaat. Noemen wij de nieuwe veranderlijken

Digitized by Google

z', x', p' en kiezen wij ze zoo, dat het eene stel veranderlijken door een tangentiale transformatie in het andere stel overgaat, dus zoo dat

$$dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{\rho'}(dz' - \Sigma p'\, dx'),$$

hetgeen weer volgens II, 2 geschieden kan; dan wordt

$$\frac{1}{\rho'}(dz' - \Sigma p'\, dx') = dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{\rho}(dZ - \Sigma P\, dX).$$

In het achterste lid zijn Z en de X, P functies van z en de x, p; men kan ze echter ook als functies van z' en de x', p' beschouwen; noemen wij ze dan Z', X', P', dan is

$$dz' - \Sigma p'\, dx' = \frac{\rho'}{\rho}(dZ' - \Sigma P'\, dX'),$$

waaruit blijkt, dat

$$Z' = a, \quad X_1' = a_1, \ldots . X_{n-1}' = a_{n-1}$$

een volledige integraal is van

$$X_n' = a_n;$$

zoowel de vergelijking als de integraal zijn uit de oorspronkelijke door invoering der nieuwe veranderlijken verkregen.

Eveneens kan men nieuwe veranderlijken in een stelsel invoeren.

Wij zullen het bovenstaande op eenige voorbeelden toepassen, die later te pas komen.

5. *Eerste voorbeeld.*

Het eenvoudigste geval is, dat men $n+1$ betrekkingen tusschen z, z' en de x, x' aanneemt.

Denkt men zich z en de x opgelost in z' en de x',

$$z = \varphi, \quad x_1 = \varphi_1, \ldots . x_n = \varphi_n;$$

dan vindt men volgens II, 3

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \ldots - p_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial z'},$$

$$-\frac{p_1'}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \ldots - p_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1'},$$

Digitized by Google

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{p_n'}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n'} - p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n'} - \ldots - p_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n'},$$

waaruit men de p kan oplossen in z' en de x', p'.

Zijn daarentegen z' en de x' opgelost in z en de x,

$$z' = \chi, \quad x_1' = \chi_1, \ldots . x_n' = \chi_n;$$

dan vindt men volgens II, 4

$$\rho = \frac{\partial \chi}{\partial z} - p_1' \frac{\partial \chi_1}{\partial z} - \ldots - p_n' \frac{\partial \chi_n}{\partial z},$$

$$-\rho p_1 = \frac{\partial \chi}{\partial x_1} - p_1' \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} - \ldots - p_n' \frac{\partial \chi_n}{\partial x_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\rho p_n = \frac{\partial \chi}{\partial x_n} - p_1' \frac{\partial \chi_1}{\partial x_n} - \ldots - p_n' \frac{\partial \chi_n}{\partial x_n},$$

waaruit men de p' in z en de x, p kan vinden.

6. *Tweede voorbeeld.*

Wij voeren nieuwe veranderlijken in door de substitutie

$$x_1' = x_1 - \psi_1, \ldots . x_\rho' = x_\rho - \psi_\rho,$$

waarbij de ψ functies van $x_{\rho+1}, \ldots . x_n$ zijn, die, benevens z, onveranderd blijven; dus is

$$z' = z, \quad x'_{\rho+1} = x_{\rho+1}, \ldots . x_n' = x_n.$$

Hierdoor is dit geval tot het voorgaande teruggebracht. Men vindt

$$\rho = 1, \quad p_1 = p_1', \ldots . p_\rho = p_\rho'.$$

$$p_{\rho+1} = p_1' \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\rho+1}} + \ldots + p_\rho' \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_{\rho+1}} + p'_{\rho+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = p_1' \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \ldots + p_\rho' \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_{\rho+1}} + p_n';$$

zoodat ook $p_1, \ldots . p_\rho$ onveranderd blijven.

De oorspronkelijke veranderlijken zijn

$$z, x_1, \ldots . x_\rho, x_{\rho+1}, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_\rho, p_{\rho+1}, \ldots . p_n;$$

de nieuwe (onnoodige accenten weglatende)

$$z, x_1', \ldots . x_\rho', x_{\rho+1}, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_\rho, p'_{\rho+1}, \ldots . p_n'.$$

Digitized by Google

7. *Derde voorbeeld.*

Wij voeren nieuwe veranderlijken in door de substitutie

$$x_2 = a_2 + (x_1 - a_1)\, x_2', \ldots . x_m = a_m + (x_1 - a_1)\, x_m';$$

terwijl $z, x_1, x_{m+1}, \ldots . x_n$ onveranderd blijven; zoodat wij dus schrijven kunnen

$$z = z', x_1 = x_1', x_2 = a_2 + (x_1' - a_1)\, x_2', \ldots . x_m = a_m + (x_1' - a_1)\, x_m$$
$$x_{m+1} = x'_{m+1}, \ldots . x_n = x_n'.$$

Hierdoor is dit geval tot het eerste van § 5 teruggebracht. Men vindt

$$\rho = 1, \qquad p_1' = p_1 + x_2'\, p_2 + \ldots + x_m'\, p_m,$$
$$p_2' = (x_1' - a_1)\, p_2, \ldots . p_m' = (x_1' - a_1)\, p_m,$$
$$p_{m+1} = p'_{m+1}, \ldots . p_n' = p_n.$$

Waaruit door oplossing volgt (terwijl $p_{m+1}, \ldots . p_n$ onveranderd blijven)

$$p_2 = \frac{p_2'}{x_1 - a_1}, \ldots . p_m = \frac{p_m'}{x_1 - a_1},$$
$$p_1 = p_1' - \frac{x_2'\, p_2' + \ldots . + x_m'\, p_m'}{x_1 - a_1}.$$

8. *Vierde voorbeeld.*

Wij nemen tusschen de veranderlijken z, z' en de x, x' de betrekking aan

$$z - f(x_1, \ldots . x_n, x'_{q+1}, \ldots . x_n') = z',$$

terwijl wij $x_1, \ldots . x_q$ onveranderd laten; dit geeft nog

$$x_1 = x_1', \ldots . x_q = x_q'.$$

Volgens II, 3 of 4 is

$$\rho = 1, \qquad p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1', \ldots . p_q = \frac{\partial f}{\partial x_q} + p_q',$$
$$p_{q+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}}, \ldots . p_n = \frac{\partial f}{\partial x_n},$$
$$p'_{q+1} = -\frac{\partial f}{\partial x'_{q+1}}, \ldots . p_n' = -\frac{\partial f}{\partial x_n'}.$$

Uit de laatste rij vindt men $x_{q+1}, \ldots . x_n$ in x' en p'; daarna uit de beide voorgaande de p in dezelfde grootheden.

Digitized by Google

VIERDE HOOFDSTUK.

Algemeene en afzonderlijke integraal.

---

1. *Afleiding van nieuwe integralen uit een volledige integraal.*

Zoodra men de transformatie

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = L\,dH + L_1\,dH_1 + \ldots + L_n\,dH_n \quad (1)$$

gevonden heeft, kent men van de differentiaalvergelijking

$$H_n = a_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

de volledige integraal

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \ldots . H_{n-1} = a_{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Maar men kan het tweede (en dus het eerste) lid van (1) nog op andere wijze nul maken, dan door (3). Elk stel (van n) vergelijkingen, dat, samen met (2), het tweede lid van (1) nul maakt, is een integraal van (2). Neemt men, om zulke integralen te vinden, tusschen de H eenige (k) betrekkingen aan, waarbij wij $H, H_1, \ldots . H_{k-1}$ uitgedrukt denken in $H_k, H_{k+1}, \ldots . H_{n-1}$

$$H = \chi, \quad H_1 = \chi_1, \ldots . H_{k-1} = \chi_{k-1}; \quad . \quad . \quad (4)$$

dan wordt (1) na substitutie

Digitized by Google

$$d z - \Sigma p\, d x =$$

$$\left(L \frac{\partial \chi}{\partial H_k} + \ldots + L_{k-1} \frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial H_k} + L_k\right) d H_k +$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+\left(L \frac{\partial \chi}{\partial H_{n-1}} + \ldots + L_{k-1} \frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial H_{n-1}} + L_{n-1}\right) d H_{n-1} +$$

$$+ L_n\, d H_n \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Nu kan men het tweede lid nul maken door te stellen, behalve (2),

$$\left.\begin{aligned} L \frac{\partial \chi}{\partial H_k} + L_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial H_k} + \ldots + L_{k-1} \frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial H_k} + L_k = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ L \frac{\partial \chi}{\partial H_{n-1}} + L_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial H_{n-1}} + \ldots + L_{k-1} \frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial H_k} + L_{n-1} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

welke $n - k$ vergelijkingen met de k vergelijkingen (4) weer een integraal van (2) vormen, waaruit men door eliminatie der p een oplossing in een of meer vergelijkingen afleidt.

In plaats van in (5) al de coefficienten der differentialen nul te stellen, had men ook enkele dier differentialen zelf nul kunnen stellen, dus de overeenkomstige H standvastig kunnen nemen. Maar, wel beschouwd, is dit in het bovenstaande begrepen, indien men enkele der vergelijkingen (4) van den vorm $H_k =$ standv. aanneemt. Nam men ze allen van dien vorm en hun aantal n, dan had men de volledige oplossing terug.

Eindelijk kan men het tweede lid van (1) nul maken door te stellen, behalve (2),

$$L = 0, \quad L_1 = 0, \ldots . L_{n-1} = 0.$$

Deze integraal heet de afzonderlijke integraal; eliminatie der p geeft de afzonderlijke oplossing.

Daar het integreeren eener differentiaalvergelijking (2) bestaat in het vinden van alle betrekkingen tusschen z en de x, p, die met (2) aan $d z - \Sigma p\, d x = 0$ voldoen, en daar wij alle

Digitized by Google

manieren, waarop $dz - \Sigma p\,dx$, of wat hetzelfde is $\Sigma L\,dH$, nul kan worden, hebben nagegaan, moeten alle integralen in de gevondene begrepen zijn.

2. *Algemeene integraal.*

Indien er slechts één betrekking tusschen de H gegeven is, heet de komende integraal de algemeene integraal, de daaruit afgeleide oplossing de algemeene oplossing. Dit is als bijzonder geval in het voorgaande begrepen. Wij zullen het nog afzonderlijk behandelen onder de iets meer algemeene aanname, dat geen der H uit de aangenomen betrekking opgelost is; dus dat men heeft

$$\chi(H, H_1, \ldots H_{n-1}) = 0;$$

dan vindt men daarbij de vergelijkingen

$$L + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial H} = 0, \quad L_1 + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial H_1} = 0, \ldots . L_{n-1} + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial H_{n-1}} = 0; \quad (7)$$

allen te zamen vormen zij de algemeene integraal.

3. *Andere vorm van het voorgaande.*

Zij de volledige integraal

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1} \ldots \quad (8)$$

der differentiaalvergelijking

$$X_n = a_n \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

gegeven en schrijven wij de bijbehoorende tangentiale transformatie in haren gebruikelijken vorm

$$dz - \Sigma p\,dx = \frac{1}{\rho}(dZ - \Sigma P\,dX);$$

dan blijkt uit het voorgaande onmiddellijk, dat men andere integralen vindt door k betrekkingen aan te nemen

$$Z = \chi, \quad X_1 = \chi_1, \ldots . X_{k-1} = \chi_{k-1} \ldots \quad (10)$$

(waarbij de χ functies van $X_k, \ldots . X_{n-1}$ zijn) en daaraan toe te voegen de volgende

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \chi}{\partial X_k} - P_1\frac{\partial \chi_1}{\partial X_k} - \ldots - P_{k-1}\frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial X_k} - P_k\right) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \chi}{\partial X_{n-1}} - P_1\frac{\partial \chi_1}{\partial X_{n-1}} - \ldots - P_{k-1}\frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial X_{n-1}} - P_{n-1}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

4. *Afleiding van nieuwe oplossingen uit een volledige oplossing.*

Indien de volledige oplossing als één vergelijking gegeven is, hetgeen men volgens III, 3 altijd mag onderstellen, kan het voorgaande een eenvoudigen vorm aannemen. Zij

$$z = \varphi(x_1, \ldots . x_n, a, a_1, \ldots . a_{n-1}, a_n) \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

de volledige oplossing van (9), verkregen door eliminatie der p uit (8) en (9); het aannemen der betrekkingen (10) komt neer op het aannemen der volgende betrekkingen tusschen de standvastigen $a, a_1, \ldots . a_{n-1}$

$$a = \chi, \quad a_1 = \chi_1, \ldots . a_{k-1} = \chi_{k-1}, \quad . \quad . \quad (10')$$

waarbij de χ nu dezelfde functies van $a_k, \ldots . a_{n-1}$ als boven van $X_k, \ldots . X_{n-1}$ voorstellen.

Voert men in (11) de in verg. (8′) van II, 5 gevonden waarden van $\rho, P_1, \ldots . P_n$ in, overal de $Z, X_1, \ldots . X_n$ door $a, a_1, \ldots . a_n$ vervangende, dan wordt (11)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_{n-1}} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} = 0,
\end{aligned}\right.$$

waarvoor wij ook schrijven kunnen

$$\frac{d\varphi}{da_k} = 0, \ldots . \frac{d\varphi}{da_{n-1}} = 0,$$

of

$$\frac{dz}{da_k} = 0, \ldots . \frac{dz}{da_{n-1}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

Digitized by Google

als wij in Φ of s de $a, a_1, \ldots . a_{k-1}$ als functies van $a_k, \ldots . a_{n-1}$ beschouwen, gegeven door de vergelijkingen (10′).

Is dus de volledige oplossing (8′) gegeven, dan leidt men daaruit andere oplossingen af door eliminatie van $a, a_1, \ldots . a_{n-1}$ tusschen (8′), (10′) en (11′); dit toch komt op hetzelfde neer, als de eliminatie der p tusschen die vergelijkingen en (9), na hierin de a door hunne waarden in s en de x, p vervangen te hebben.

Digitized by Google

VIJFDE HOOFDSTUK.

Bijzondere vormen der differentiaalvergelijking.

---

1. *Vergelijking zonder* z.

Komt in een differentiaalvergelijking z niet voor, dan mag men in de volledige oplossing, die wij in één vergelijking aannemen, z met een willekeurige standvastige vermeerderen, zonder dat zij ophoudt een oplossing te zijn (omdat de p hierdoor niet van waarde veranderen); zij kan dus den vorm aannemen, waarbij a_n weer de rekenkundige standvastige is,

$$z = \varphi(x_1, \ldots . x_n, a_1, \ldots . a_n) + a. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Leidt men hieruit weer de differentiaalvergelijking af, dan heeft men

$$p_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots . p_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

uit deze vergelijkingen de $a, a_1, \ldots, a_n$ oplossende, vindt men

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1}, \quad X_n = a_n,$$

waarvan de laatste de differentiaalvergelijking is, als men a_n als rekenkundig beschouwt. Daar a in geen der vergelijkingen (2) voorkomt, zijn deze op zich zelf voldoende om $a_1, \ldots . a_n$ op te lossen; en dus zullen $X_1, \ldots . X_n$ vrij van z zijn, omdat z niet in (2) voorkomt; eindelijk lost men uit (1) a op.

Digitized by Google

Hieruit blijkt dat Z den vorm heeft $z - M\ (x, p)$, waarbij M de functie is, waarin ϕ overgaat, als men de $a_1, \ldots . a_n$ door hunne waarden in de x, p vervangt; M is dus ook vrij van z.

De tangentiale transformatie is dus, daar $\rho = 1$ wordt,

$$dz - \Sigma p\, dx = dZ - \Sigma P\, dX,$$

of $$dz - \Sigma p\, dx = d(z - M) - \Sigma P\, dX,$$

of $$\Sigma p\, dx = dM + \Sigma P\, dX. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Het vinden van deze transformatie is eenvoudiger dan het vinden der algemeene; z komt er volstrekt niet meer in voor; wanneer men (3) gevonden heeft, dan is

$$X_1 = a_1, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1}, \quad z - M = a \quad . \quad . \quad (4)$$

een volledige integraal van

$$X_n = a_n.$$

2. *Herleiding van een vergelijking met* z *tot een zonder* z. *Eerste methode.*

Om een differentiaalvergelijking met z te herleiden tot een andere, waarin z ontbreekt, denken wij haar gemakshalve naar z opgelost

$$z = \zeta\,(x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dan substitueert men, V en t als nieuwe veranderlijken invoerende,

$$z = \frac{V}{t}\ , \text{ dus } dz = \frac{1}{t}\, dV - \frac{V}{t^2}\, dt. \quad . \quad . \quad (6)$$

Hierdoor wordt

$$dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{t}\, dV - \frac{V}{t^2}\, dt - p_1\, dx - \ldots$$

$$\ldots - p_n\, dx_n = \frac{1}{t}\left(dV - \frac{V}{t}\, dt - p_1 t\, dx_1 - \ldots - p_n t\, dx_n\right);$$

stellen wij nu

$$\frac{V}{t} = p', \quad p_1 t = p_1', \ldots . p_n t = p_n'; \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

dan verkrijgt men

Digitized by Google

$$dz - \Sigma p\,dx = \frac{1}{t}(dV - p'\,dt - p_1'\,dx_1 - \ldots - p_n'\,dx_n); \quad (8)$$

terwijl de differentiaalvergelijking door dezelfde substitutie wordt

$$p' = \zeta\left(x_1, \ldots . x_n, \frac{p_1'}{t}, \ldots . \frac{p_n'}{t}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Hierin zijn $V, t, x_1, \ldots . x_n, p', p_1', \ldots . p_n'$ de veranderlijken; het aantal der zoogenaamd onafhankelijke veranderlijken is weliswaar met één vermeerderd, maar daarentegen komt de zoogenaamd afhankelijke veranderlijke V niet expliciet voor (p' is hetzelfde als z).

Elke volledige integraal van (5)

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1}, \quad . \quad . \quad (9)$$

waarbij dus

$$dz - \Sigma p\,dx = \frac{1}{\rho}(dZ - \Sigma P\,dX)$$

is, als wij X_n schrijven voor $z - \zeta$, geeft door de substitutie (6) en (7) een integraal van (5'), mits men de eerste vergelijking (7) toevoegt. Duiden wij de Z, X na de substitutie door Z', X' aan, dan is

$$V - p'\,t = 0, \quad Z' = a, \quad X_1' = a_1, \ldots . X'_{n-1} = a_{n-1}$$

zulk een integraal, echter geen volledige; want er is een standvastige te weinig. Daar echter V in (5') niet voorkomt, mogen wij in de integraal V met een standvastige vermeerderen; dus is

$$V - p'\,t = C, \quad Z' = a, \quad X_1' = a_1, \ldots . X'_{n-1} = a_{n-1} \quad (9')$$

een volledige integraal van (5').

Zij omgekeerd gegeven een volledige integraal van (5'), die volgens § 1 van den vorm

$$V - M'(t, x_1, \ldots . x_n, p', p_1', \ldots . p_n') = C, \quad Z' = a,$$
$$X_1' = a_1, \ldots . X'_{n-1} = a_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

mag aangenomen worden; hierbij behoort de tangentiale transformatie

Digitized by Google

$$dV - p\,dt - p_1'\,dx_1 - \ldots - p_n'\,dx_n = d(V - M') + \\ + L'\,dZ' + L_1'\,dX_1' + \ldots + L_{n-1}'\,dX_{n-1}' + L_n'\,dX_n'$$

[waarbij X_n' staat voor het eerste lid der op nul herleide vergelijking (5')]; dan volgt hieruit door de substitutie (6) en (7), omgekeerd gebruikt,

$$t(dz - \Sigma p\,dx) = d(zt - M) + L\,dZ + L_1\,dX_1 + \ldots + L_n\,dX_n,$$

als wij de waarden, die M', Z' en de X', L' door deze omgekeerde substitutie verkrijgen, door M, Z, X, L aanduiden, of

$$dz - \Sigma p\,dx = \frac{1}{t}\left\{d(zt - M) + L\,dZ + L_1\,dX_1 + \ldots + L_n\,dX_n\right\}.$$

Daar t in het eerste lid niet meer voorkomt, kan zij slechts schijnbaar in het tweede lid voorkomen; wij kunnen dus aan t een willekeurige waarde geven, die wij zoo kiezen, dat

$$zt - M = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wordt; dan gaat de vergelijking over in

$$dz - \Sigma p\,dx = \frac{1}{t}(L\,dZ + L_1\,dX_1 + \ldots + L_n\,dX_n),$$

waaruit blijkt dat, na t door zijne waarde uit (11) vervangen te hebben,

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \ldots . X_{n-1} = a_{n-1} \quad . \quad . \quad (10')$$

een volledige integraal is van (5). Zij is uit de volledige integraal (10) van (5') afgeleid door $C = 0$ te nemen, daarna de omgekeerde substitutie (6), (7) uit te voeren en t te elimineeren (want de eerste vergelijking (10) gaat hierdoor in (11) over).

3. *Tweede methode van herleiding tot een vergelijking zonder* z.

Stelt men zich bij de integratie eener differentiaalvergelijking niet voor z als functie van de x en n standvastigen te vinden; maar zoekt men de functie, die gelijk nul moet gesteld worden om de bovengenoemde waarde van z te verkrijgen

Digitized by Google

$$f(z, x_1, \ldots . x_n) = 0;$$

dan volgt daaruit

$$p_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots . p_n = -\frac{\partial f}{\partial x_n} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Substitueert men deze uitdrukkingen voor p in de gegeven differentiaalvergelijking

$$H_n(z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

dan wordt zij

$$H_n\left\{z, x_1, \ldots . x_n, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \ldots . -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right\} = 0.$$

Beschouwt men nu de functie f als nieuwe veranderlijke, die wij W noemen; dan is laatstgenoemde vergelijking als een gedeeltelijke differentiaalvergelijking in W te beschouwen (waartoe wij voor $\frac{\partial f}{\partial}$ schrijven $\frac{d W}{d}$); zij wordt dan

$$H_n\left\{z, x_1, \ldots . x_n, -\frac{\frac{d W}{d x_1}}{\frac{d W}{d z}}, \ldots . -\frac{\frac{d W}{d x_n}}{\frac{d W}{d z}}\right\} = 0;$$

zij bevat een onafhankelijk veranderlijke z meer dan de gegevene, maar de functie W komt er niet expliciet in voor, waardoor wij hetzelfde doel bereikt hebben als in de vorige §; hier is de komende vergelijking homogeen.

Daar er nu geen reden meer is om de z en x te onderscheiden, schrijven wij

$$z = y_0, \quad x_1 = y_1, \ldots . x_n = y_n, \frac{d W}{d z} = q_0, \frac{d W}{d x_1} = q_1, \ldots . \frac{d W}{d x_n} = q_n,$$

waardoor de differentiaalvergelijking wordt

$$H_n\left\{y_0, y_1, \ldots . y_n, -\frac{q_1}{q_0}, \ldots . -\frac{q_n}{q_0}\right\} = 0 \quad . \quad . \quad (12')$$

Uit de tangentiale transformatie

$$d z - \Sigma p \, d x = L \, d H + L_1 \, d H_1 + \ldots + L_n \, d H_n \quad (13)$$

Digitized by Google

volgt door dezelfde substitutie, na vermenigvuldiging van beide leden met $\frac{dW}{dz} = q_0$,

$$q_0 dy_0 + q_1 dy_1 + \ldots + q_n dy_n = q_0(LdH + L_1 dH_1 + \ldots + L_n dH_n),$$

of symmetrisch

$$q_0 dy_0 + q_1 dy_1 + \ldots + q_n dy_n = Q_0 dY_0 + Q_1 dY_1 + \ldots + Q_n dY_n, \quad (13')$$

waarbij (terwijl H_n en Y_n de eerste leden van (12) en (12') voorstellen)

$$H = Y_0, \quad H_1 = Y_1, \ldots H_n = Y_n, \frac{Q_0}{q_0} = L, \frac{Q_1}{q_0} = L_1, \ldots \frac{Q_n}{q_0} = L_n.$$

De Y zijn homogeen van den 0^{en} graad in q, eveneens de L, dus de Q homogeen van den 1^{en} graad.

Uit de tangentiale transformatie (13') leidt men de volledige integraal van (12) af

$$Y_0 = a, \quad Y_1 = a_1, \ldots . Y_{n-1} = a_{n-1}, \quad . \quad . \quad (14)$$

namelijk na invoering der z, x, p (hetgeen mogelijk is, omdat de Y homogeen van den 0^{en} graad in q zijn). Uit (14) vindt men de volledige oplossing van (12) door eliminatie der $\frac{q_1}{q_0}, \ldots . \frac{q_n}{q_0}$.

Maar daarom is (14) nog geen integraal van (12'); daartoe zou noodig zijn, dat

$$dW - q_0 dy_0 - q_0 dy_1 - \ldots - q_n dy_n = 0$$

wordt; terwijl (14) alleen het stuk $q_0 dy_0 + \ldots + q_n dy_n$ nul maakt; merkt men echter op, dat men slechts $W = C$ behoeft te nemen om ook $dW = 0$ te maken; dan blijkt, dat

$$W = C, \quad Y_0 = a, \quad Y_1 = a_1, \ldots . Y_{n-1} = a_{n-1} . \quad (15)$$

een volledige integraal van (12') is.

Zoodra men omgekeerd een volledige integraal (15) van (12') gevonden heeft, behoeft men slechts de eerste vergelijking $W = C$ weg te laten om een volledige integraal van (12) te hebben.

Zij de uit (14) afgeleide volledige oplossing van (12)

Digitized by Google

$$a = \psi(y_0, y_1, \ldots . y_n, a_1, \ldots . a_{n-1}),$$

dan geeft (15) voor de volledige oplossing van (12')

$$W = C_1, \qquad a = \psi;$$

waaruit wij volgens III, 3 de volledige oplossing in één vergelijking afleiden

$$W = C + \lambda\psi.$$

4. *Homogene vergelijking. Hare volledige oplossing.*

Daar elke homogene vergelijking (12'), waarin de functie niet expliciet voorkomt, op de bovenstaande wijze uit een niet-homogene (12) ontstaan kan, zoo blijkt uit de vorige §, dat hier de volledige oplossing altijd in den volgenden vorm kan verkregen worden

$$W = C + \lambda\psi(y_0, y_1, \ldots . y_n, a_1, \ldots . a_{n-1}).$$

Omgekeerd geeft een dergelijke volledige oplossing een homogene vergelijking; want men vindt deze door eliminatie van $\lambda, a_1, \ldots . a_{n-1}$ tusschen

$$q_0 = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial y_0}, \; q_1 = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \; \ldots . q_n = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial y_n}.$$

Om de volledige integraal van (12') te vinden, is het voldoende de tangentiale transformatie (13') gevonden te hebben; dan is (15) de volledige integraal.

5. *Vergelijking, waarin een der p ontbreekt.*

Komt in een differentiaalvergelijking

$$H_n = a_n$$

p_1 niet voor, dan integreert men eerst, alsof x_1 standvastig was; noemen wij in die onderstelling het eerste lid $H_1^{\times}$. Zij de volledige integraal

$$H_1^{\times} = a_1, \ldots . H_{n-1}^{\times} = a_{n-1};$$

en de overeenkomstige tangentiale transformatie

$$dz - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = L_1 dH_1^{\times} + \ldots + L_{n-1} dH_{n-1}^{\times} + L_n dH_n^{\times};$$

waarbij de $^{\times}$ aanduiden, dat x_1 als standvastig beschouwd wordt; zoodat dus

$$d H_i^{\times} = d H_i - \frac{\partial H_i}{\partial x_1} d x_1.$$

Digitized by Google

Uit de voorgaande transformatie volgt

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = - p_1 dx_1 + L_1 dH_1^{\times} +$$

$$..+ L_{n-1} dH_{n-1}^{\times} + L_n dH_n^{\times} = - \left(p_1 + L_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \ldots + L_n \frac{\partial H_n}{\partial x_n} \right) dx_1$$

$$+ L_1 dH_1 + \ldots + L_{n-1} dH_{n-1} + L_n dH_n,$$

waaruit blijkt, dat de volledige integraal van de gegeven vergelijking is

$$x_1 = k, \quad H_1 = a_1, \ldots . H_{n-1} = a_{n-1}.$$

Was de volledige oplossing van $H_n^{\times} = a_n$

$$\psi (z, x_1, \ldots . x_n, a_2, \ldots . a_{n-1}) = a_1;$$

dan is die van $H_n = a_n$

$$x_1 = k, \quad \psi = a_1 \qquad \text{of} \qquad \psi - \lambda x_1 = C.$$

Op dezelfde wijze gaat men te werk als er meerdere p ontbreken, $p_1, \ldots . p_m$; de volledige oplossing wordt

$$x_1 = k_1, \ldots . x_m = k_m, \ \psi = a \text{ of wel } \psi - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_m x_m = C,$$

waarbij ψ een functie is van $z, x_{m+1}, \ldots . x_n$ en $n - m - 1$ willekeurige standvastigen.

De bij den eersten vorm der volledige oplossing behoorende tangentiale transformatie is

$$dz - \Sigma p\, dx = P_1 dx_1 + \ldots + P_m dx_m + L dH$$

$$+ L_{m+1} dH_{m+1} + \ldots + L_{n-1} dH_{n-1} + L_n dH_n,$$

waarbij $P_1 = p_1 + f_1, \ldots . P_m = p_m + f_m$; hierin zijn $f_1, \ldots . f_m$, even als de $L, H,$ functies van $z, x, \ldots . x_n, p_{m+1}, \ldots . p_n$.

6. *Scheiding der veranderlijken.*

Zij gegeven de vergelijking zonder z,

$$f(x_{k+i+1}, \ldots . x_n, p_{k+i+1}, \ldots . p_n, \Phi, \psi) = 0,$$

waarin: $\Phi = \Phi (x_1, \ldots . x_i, p_1, \ldots . p_i)$ en

$$\psi = \psi (x_{i+1}, \ldots . x_{i+k}, p_{i+1}, \ldots . p_{i+k}).$$

Digitized by Google

Men integreert afzonderlijk

$\Phi = b$; de volledige integraal zij

$$z - M_1 = a_1,\ X_1 = a_1, \ldots . X_{i-1} = a_{i-1};$$

$\psi = c$; de volledige integraal zij

$$z - M_2 = a_2, X_{i+1} = a_{i+1}, \ldots . X_{i+k-1} = a_{i+k-1};$$

$f^{\times} = a$; de volledige integraal zij

$$z - M_3^{\times} = a_2, X_{i+k+1}^{\times} = a_{i+k+1}, \ldots . X_{n-1}^{\times} = a_{n-1}.$$

De $^{\times}$ in de laatste regels duiden aan, dat men in f de Φ en ψ door de standvastigen b en c vervangen heeft.

Daaruit volgen de overeenkomstige tangentiale transformaties (zie § 1).

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_i dx_i = dM_1 + P dX_1 + \ldots$$
$$\ldots + P_{i-1} dX_{i-1} + P_i d\Phi;$$

$$p_{i+1} dx_{i+1} + \ldots + p_{i+k} dx_{i+k} = dM_2 + P_{i+1} dX_{i+1} + \ldots$$
$$\ldots + P_{i+k-1} dX_{i+k-1} + P_{i+k} d\psi;$$

$$p_{i+k+1} dx_{i+k+1} + \ldots + p_n dx_n = dM_3^{\times} + P_{i+k+1} dX_{i+k+1}^{\times} + \ldots$$
$$\ldots + P_{n-1} dX_{n-1}^{\times} + P_n df^{\times}.$$

Maar algemeen is, voor elke functie χ,

$$d\chi^{\times} = d\chi - \frac{\partial \chi}{\partial \Phi} d\Phi - \frac{\partial \chi}{\partial \psi} d\psi;$$

dus wordt de laatste transformatie

$$p_{i+k+1} dx_{i+k+1} + \ldots + p_n dx_n =$$
$$dM_3 + P_{i+k+1} dX_{i+k+1} + \ldots + P_{n-1} dX_{n-1} + P_n df$$
$$-\left(\frac{\partial M_3}{\partial \Phi} + P_{i+k+1} \frac{\partial X_{i+k+1}}{\partial \Phi} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial X_{n-1}}{\partial \Phi} + P_n \frac{\partial f}{\partial \Phi}\right) d\Phi;$$
$$-\left(\frac{\partial M_3}{\partial \psi} + P_{i+k+1} \frac{\partial X_{i+k+1}}{\partial \psi} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial X_{n-1}}{\partial \psi} + P_n \frac{\partial f}{\partial \psi}\right) d\psi.$$

Nu optellende, vindt men de nieuwe transformatie

Digitized by Google

$$p_1\,dx_1+\ldots+p_n\,dx_n=d(M_1+M_2+M_3)+P_1\,dX_1+\ldots$$
$$\ldots+P_{i-1}\,dX_{i-1}+P_i\,d\varphi+P_{i+1}\,dX_{i+1}+\ldots$$
$$\ldots+P_{i+k-1}\,dX_{i+k-1}+P_{i+k}\,d\psi+P_{i+k+1}\,dX_{i+k+1}+\ldots$$
$$\ldots+P_{n-1}\,dX_{n-1}+P_n\,dX_n,$$

waaruit blijkt, dat

$$z-(M_1+M_2+M_3)=C,$$
$$X_1=a_1,\ \ldots\ X_{i-1}=a_{i-1},\qquad \varphi=b,$$
$$X_{i+1}=a_{i+1},\ \ldots\ X_{i+k-1}=a_{i+k-1},\ \psi=c,$$
$$X_{i+k+1}=a_{i+k+1},\ \ldots\ X_{n-1}=a_{n-1},$$

de volledige integraal is der gegeven vergelijking. Zij wordt op eenvoudige manier uit de volledige integralen der deelen afgeleid.

Een bijzonder geval is (zie boven § 5), dat de vergelijking zonder p_1 is; dan is $\varphi=x_1$ (ψ vervalt).

Een ander bijzonder geval is, dat de vergelijking zonder x_1 is,

$$f(x_2,\ldots x_n,p_1,\ldots p_n)=a;$$

men integreert afzonderlijk

$$p_1=b\quad\text{en}\quad f^{\times}(x_2,\ldots x_n,b,p_2,\ldots p_n)=a.$$

De eerste geeft

$$p_1\,dx_1=d(p_1x_1)-x_1\,dp_1.$$

de laatste

$$p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n=dM^{\times}+P_2dX_2^{\times}+\ldots+P_{n-1}dX_{n-1}^{\times}+P_ndf^{\times},$$

De gezochte volledige integraal wordt

$$z-(M+p_1x_1)=C,\ p_1=b,\ X_2=a_2,\ \ldots\ X_{n-1}=a_{n-1}.$$

Dit laatste geval had men ook tot het vorige (van § 5) kunnen terugbrengen door de tangentiale transformatie

$$dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n=d(z+p_1x_1)-$$
$$-x_1\,dp_1-p_2\,dx_2-\ldots-p_n\,dx_n,$$

waardoor p_1 en x_1 van rol verwisselen.

Digitized by Google

ZESDE HOOFDSTUK.

Eigenschappen der homogene tangentiale transformatie.

---

1. *Drie hoofdvormen der tangentiale transformatie.*

Wij hebben in het voorgaande hoofdstuk gezien, dat de tangentiale transformatie, behalve in den algemeenen vorm

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = \frac{1}{\rho}(dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n),$$

nog in de beide bijzondere vormen kan voorkomen.

$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dy_n = d\,M + P_1\,d\,X_1 + \ldots + P_n\,d\,X_n$$

(waarbij alle functies in het tweede lid vrij van z zijn)

en

$$q_0\,dy_0 + q_1\,dy_1 + \ldots + q_n dy_n = Q_0\,dY_0 + Q_1\,dY_1 + \ldots + Q_n\,d\,Y_n$$

(waarbij de functies in het tweede lid homogeen in de q zijn, Y van den 0^{en} en Q van den 1^{en} graad).

Wij beginnen met het onderzoek der laatste vergelijking en leiden er later de andere uit af.

2. *Homogene transformatie.*

Om voor Y en Q functies van de y en q, homogeen van den 0^{en} en 1^{en} graad in de q te vinden, die voldoen aan

$$\Sigma_{i=0}^{i=n}\, q_i\,d\,y_i = \Sigma_{i=0}^{i=n}\, Q_i\,dY_i\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Digitized by Google

substitueeren wij in het tweede lid

$$dY_i = \Sigma_{\alpha=0}^{\alpha=n}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_\alpha}\,dy_\alpha + \frac{\partial Y_i}{d\,q_\alpha}\,dq_\alpha\right), \quad . \quad . \quad (2a)$$

$$dQ_i = \Sigma_{\alpha=0}^{\alpha=n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_\alpha}\,dy_\alpha + \frac{\partial Q_i}{\partial q_\alpha}\,dq_\alpha\right); \quad . \quad . \quad (2b)$$

daarna stelt men de coëfficienten der differentialen in beide leden gelijk; dit geeft

$$\Sigma_{i=0}^{i=n} Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_\alpha} = q_\alpha, \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

$$\Sigma_{i=0}^{i=n} Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial q_\alpha} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

3. *Vervolg.*

Nemen wij nu twee der vergelijkingen (3*a*)

$$\Sigma_{i=0}^{i=n} Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_g} = q_g, \qquad \Sigma_{i=0}^{i=n} Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_h} = q_h;$$

wij differentieeren de eerste naar y_h, de tweede naar y_g, en trekken de komende vergelijkingen van elkaar af; dit geeft

$$\Sigma_{i=0}^{i=n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_h}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial y_g} - \frac{\partial Q_i}{\partial y_g}\cdot\frac{\partial Y_i}{d\,y_h}\right) = 0. \quad . \quad (4a)$$

Evenzoo volgt uit een der vergelijkingen (3*a*) met een der vergelijkingen (3*b*)

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_{i=0}^{i=n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial y_g} - \frac{\partial Q_i}{\partial y_g}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial q_h}\right) &= 0, \quad h \lessgtr g,\\ \Sigma_{i=0}^{i=n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial y_g} - \frac{\partial Q_i}{\partial q_g}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial q_h}\right) &= 1, \quad h = g.\end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

Eindelijk uit twee der vergelijkingen (3*b*)

$$\Sigma_{i=0}^{i=n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial q_g} - \frac{\partial Q_i}{\partial q_g}\cdot\frac{\partial Y_i}{\partial q_h}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4c)$$

In al deze vergelijkingen kunnen g en h alle waarden van 0 tot n krijgen.

Digitized by Google

4. *Oplossing der dy, dq in de dY, dQ.*

De vergelijkingen (4) kunnen dienen om uit (2) de dy en dq op te lossen in de dY en dQ. Vermenigvuldigt men daartoe elk der vergelijkingen (2*a*) met een factor λ, elk der vergelijkingen (2*b*) met een factor μ, en telt daarna op; dan vindt men

$$\Sigma_{i=0}^{i=n}(\lambda_i\, dY_i + \mu_i\, dQ_i) = \Sigma_i\left(\lambda_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_0} + \mu_i \frac{\partial Q_i}{\partial y_0}\right) dy_0 + \ldots$$
$$+ \ldots + \Sigma_i\left(\lambda_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_n} + \mu_i \frac{\partial Q_i}{\partial y_n}\right) dy$$
$$+ \Sigma_i\left(\lambda_i \frac{\partial Y_i}{\partial q_0} + \mu_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_0}\right) dq_0 + \ldots.$$
$$\ldots. + \Sigma_i\left(\lambda_i \frac{\partial Y_i}{\partial q_n} + \mu_i \frac{\partial Q_i}{\partial y_n}\right) dq_n.$$

Om nu dy_α op te lossen, moet men de λ, μ zoo kiezen, dat alle coefficienten der differentialen in het tweede lid nul worden, behalve die van dy_α, welke 1 moet zijn; uit (4) blijkt, dat men nemen moet

$$\lambda_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_\alpha}, \qquad \mu_i = -\frac{\partial Y_i}{\partial q_\alpha}.$$

Hierdoor wordt

$$dy_\alpha = \Sigma_i\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_\alpha} dY_i - \frac{\partial Y_i}{\partial q_\alpha} dQ_i\right) (\alpha, i = 0, \ldots. n) \quad . \quad (5a)$$

Eveneens vindt men

$$dq_\alpha = \Sigma_i\left(-\frac{\partial Q_i}{\partial y_\alpha} dY_i + \frac{\partial Y_i}{\partial y_\alpha} dQ_i\right). \quad . \quad . \quad (5b)$$

5. *Opmerking.*

Voor wij verder gaan, kunnen wij opmerken, dat uit (5) in verband met de identieke vergelijkingen

$$dy_\alpha = \Sigma_i\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial Y_i} dY_i + \frac{\partial y_\alpha}{\partial Q_i} dQ_i\right),$$
$$dq_\alpha = \Sigma_i\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial Y_i} dY_i + \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_i} dQ_i\right),$$

Digitized by Google

volgt

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial Y_i}, \quad -\frac{\partial Y_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial Q_i},$$
$$-\frac{\partial Q_i}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial q_\alpha}{\partial Y_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q_i}. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

In de eerste leden worden de Y, Q als functies van y, q; in de tweede leden omgekeerd de y, q als functies van de Y, Q beschouwd.

In 't bijzonder wijzen wij op de volgende vergelijkingen, die wij later noodig hebben,

$$-\frac{\partial Y_1}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial Q_1}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_1} \quad . \quad . \quad (6')$$

6. *Eigenschappen der grootheden* Y, Q.

Voor wij met het in § 4 behandelde verder gaan, voeren wij de verkorte schrijfwijze in (Φ en ψ functies van de y, q zijnde)

$$(\Phi, \psi) = \Sigma_{\alpha=0}^{\alpha=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right), \quad . \quad (7)$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$(\psi, \Phi) = -(\Phi, \psi) \quad \text{en} \quad (\Phi, \Phi) = 0.$$

Substitueeren wij nu in (2) de voor de dy, dq in (5) gevonden waarden, dan komt er ($r = 0, \ldots . n$)

$$dY_r = (Y_r, Q_0) dY_0 + \ldots . + (Y_r, Q_n) dY_n + (Y_r, Y_0) dQ_0 - \ldots .$$
$$\ldots . - (Y_r, Y_n)\, d\, Q_n,$$

$$dQ_r = (Q_r, Q_0) dY_0 + \ldots . + (Q_r, Q_n) dY_n + (Y_0, Q_r) dQ_0 + \ldots .$$
$$\ldots . + (Y_n, Q_r)\, d\, Q_n,$$

waaruit door vergelijking der coefficienten van beide leden volgt

$$(Y_i, Y_k) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$
$$(Y_i, Q_k) = 0 \text{ voor } i \lessgtr k, \quad (Y_i, Q_k) = 1 \text{ voor } i = k, \quad . \quad (8b)$$
$$(Q_i, Q_k) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8c)$$

$$(i, k = 0, \ldots . n).$$

Digitized by Google

7. *Homogeniteit der Y, Q.*

Verder blijkt, dat de Y homogeen van den 0^{en} graad in de q zijn; want uit (3) volgt

$$\sum_{\alpha} q_\alpha \frac{\partial Y_k}{\partial q_\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{i} Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial Y_k}{\partial q_\alpha},$$

en

$$0 = \sum_{\alpha} \sum_{i} Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial Y_k}{\partial y_\alpha};$$

nu aftrekkende

$$\sum_{\alpha} q_\alpha \frac{\partial Y_k}{\partial q_\alpha} = \sum_{i} Q_i (Y_i, Y_k) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

omdat alle $(Y_i, Y_k) = 0$ zijn; waarmede de homogeniteit der Y bewezen is.

Eveneens is

$$\sum q_\alpha \frac{\partial Q_k}{\partial q_\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{i} Q^i \frac{\partial Y_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial Q_k}{\partial q_\alpha}$$

en

$$0 = \sum_{\alpha} \sum_{i} Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial Q_k}{\partial y_\alpha};$$

weer aftrekkende

$$\sum_{\alpha} q_\alpha \frac{\partial Q_k}{\partial q_\alpha} = \Sigma_i Q_i (Y_i, Q_k) = Q_k, \quad . \quad . \quad . \quad (9b)$$

omdat alle $(Y_i, Q_k) = 0$ zijn, behalve $(Y_k, Q_k) = 1$; hieruit blijkt dat Q_k homogeen in de q is van den 1^{en} graad.

8. *Onafhankelijkheid der functies Y, Q.*

Daar het mogelijk is, blijkens 5, de dy, dq in de dY, dQ uit te drukken, moeten de Y, Q onderling onafhankelijk zijn (hetgeen te voorzien was); dus moet de determinant

$$D = \Sigma \pm \frac{\partial Y_0}{\partial y_0} \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} \frac{\partial Q_0}{\partial q_0} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \gtrless 0$$

zijn (dit drukt de oplosbaarheid der vergelijkingen (2) volgens de dY, dQ uit).

Digitized by Google

9. *Omkeering der voorgaande eigenschappen.*

Uit (8) en uit de identiteit (2) volgt weer (5), als men aanneemt, dat de Y, Q onderling onafhankelijk zijn; want dan moet (2) volgens de dy, dq oplosbaar zijn; en dat (5) de oplossing is, bewijst men door substitutie der door (5) voor de dy, dq gegeven waarden in (6), gebruik makende van de vergelijkingen (8).

Uit (5) en (2) leidt men (4) af door (2) in (5) te substitueeren en de coefficienten der dy, dq te vergelijken.

Vervolgens leidt men uit (4) en de vergelijkingen (9) der homogeniteit weer (3) af, gebruik makende van (8).

Eindelijk leidt men uit (3) en (2) weer (1) af.

Zoodat ten slotte (1) volgt uit (8) en (9), als de onafhankelijkheid der Y, Q gegeven is (want (2) is een identiteit).

De uitkomst van al deze beschouwingen is dus het volgende

10. *Theorema.*

Indien eenige functies Y,Q voldoen aan

$$\Sigma_{i=0}^{i=n} q_i\, d\, y_i = \Sigma_{i=0}^{i=n} Q_i\, d\, Y_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarbij de q, y onderling onafhankelijke veranderlijken voorstellen, dan zijn de Q, Y

1°. onderling onafhankelijk;

2°. homogeen in de q, Y van den 0^{en}, Q van den 1^{en} graad;

3°. onderling verbonden door de volgende betrekkingen

$$(Y_i, Y_k) = 0, \qquad (Y_i, Q_k) = \begin{cases} 0, i \gtrless k \\ 1, i = k \end{cases}, \qquad (Q_i, Q_k) = 0. \quad (8)$$

Omgekeerd zullen $2n+2$ functies Q, Y, die aan deze drie voorwaarden voldoen, ook aan (1) voldoen, dus een homogene tangentiale transformatie opleveren.

11. *Het vinden der Q uit lineaire vergelijkingen.*

Zoodra men $n+1$ onderling onafhankelijke functies Y van den 0^{en} graad in q gevonden heeft, die voldoen aan de voorwaarden

Digitized by Google

$$(Y_i; Y_k) = 0,$$

kan men de $n+1$ functies Q vinden uit (3); de aldus gevonden Q voldoen aan (3), dus aan (1); zij moeten dus ook aan (8*b*) en (8*c*) voldoen.

Het aantal vergelijkingen (3) is $2n+2$; maar indien de Y onderling onafhankelijk en homogeen van den 0^{en} graad zijn en aan (8*a*) voldoen, zijn er slechts $n+1$ dezer vergelijkingen (3) onderling onafhankelijk, welk aantal noodig en voldoende is om de Q te vinden. Dit bewijst men aldus.

Wij noemen de eerste leden der op nul herleide vergelijkingen (3*a*) en (3*b*) A_α en B_α

$$A_\alpha = \sum_i Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_\alpha} - q_\alpha, \qquad B_\alpha = \sum_i Q_i \frac{\partial Y_i}{\partial q_\alpha};$$

wij vermenigvuldigen de eerste vergelijking met $\frac{\partial Y_k}{\partial q_\alpha}$, de laatste met $-\frac{\partial Y_k}{\partial y_\alpha}$ en tellen op

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial Y_k}{dq_\alpha} A_\alpha - \frac{\partial Y_k}{\partial q_\alpha} B_\alpha \right) = \sum_i Q_i (Y_i, Y_k) - \sum_\alpha q_\alpha \frac{\partial Y_k}{\partial q_\alpha} = 0,$$

hetgeen, door $0, \ldots . n$ te nemen voor $k, n+1$ betrekkingen tusschen A_α en B_α geeft; deze betrekkingen zijn onderling onafhankelijk, indien niet alle determinanten, gevormd uit $n+1$ kolommen van den volgenden determinant, nul zijn,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial y_0}, & \frac{\partial Y_0}{\partial y_1}, \ldots . \frac{\partial Y_0}{\partial y_n}, & \frac{\partial Y_0}{\partial q_0}, \ldots . \frac{\partial Y_0}{\partial q_n} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y_0}, & \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}, \ldots . \frac{\partial Y_1}{\partial y_n}, & \frac{\partial Y_1}{\partial q_0}, \ldots . \frac{\partial Y_1}{\partial q_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial Y_n}{\partial y_0}, & \frac{\partial Y_n}{\partial y_1}, \ldots . \frac{\partial Y_n}{\partial y_n}, & \frac{\partial Y_n}{\partial q_0}, \ldots . \frac{\partial Y_n}{\partial q_n} \end{vmatrix},$$

hetgeen onmogelijk is, daar de Y onderling onafhankelijk zijn.

Hierdoor krijgen wij in plaats van § 10 het volgende

Digitized by Google

12. *Theorema.*

Om de transformatie

$$\sum_{i=0}^{i=n} q_i \, d\, y_i = \sum_{i=0}^{i=n} Q_i \, d\, Y_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

te vinden is het voldoende $n+1$ onderling onafhankelijke functies Y te vinden, homogeen van den 0^{en} graad in de q, die voldoen aan

$$(Y_i, Y_k) = 0 ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

dan worden de Q uit lineaire vergelijkingen (3) gevonden. De aldus gevonden Q zijn onderling en van de Y onafhankelijk, homogeen van den 1^{en} graad in q, r, en zij voldoen aan

$$(Q_i, Q^k) = 0, \qquad (Y_i, Q^k) = \begin{cases} 0, & i \gtrless k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad . \quad . \quad (8b \text{ en } c)$$

Digitized by Google

ZEVENDE HOOFDSTUK.

Eigenschappen der algemeene tangentiale transformatie.

---

1. *Twee eigenschappen der uitdrukkingen* (φ, ψ).

Wij beginnen twee eigenschappen der uitdrukkingen (φ, ψ) af te leiden, die wij aanstonds noodig hebben.

1°. Indien φ en ψ beide producten zijn, φ van A en B, ψ van C en D, terwijl A, B, C en D functies van de y en q zijn; dan is

$$(AB, CD) = \sum_i \left(\frac{\partial AB}{\partial y_i} \frac{\partial CD}{\partial q_i} - \frac{\partial AB}{\partial q_i} \frac{\partial CD}{\partial y_i} \right) =$$

$$= \sum_i \left\{ \left(A \frac{\partial B}{\partial y_i} + B \frac{\partial A}{\partial y_i} \right) \left(C \frac{\partial D}{\partial q_i} + D \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) - \left(A \frac{\partial B}{\partial q_i} + B \frac{\partial A}{\partial q_i} \right) \left(C \frac{\partial D}{\partial y_i} + D \frac{\partial C}{\partial y_i} \right) \right\}$$

$$= AC \sum_i \left(\frac{\partial B}{\partial y_i} \frac{\partial D}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial D}{\partial y_i} \right) + AD \sum_i \left(\frac{\partial B}{\partial y_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial y_i} \right) +$$

$$+ BC \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial D}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial D}{\partial y_i} \right) + BD \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial y_i} \right)$$

$$= AC(B, D) + AD(B, C) + BC(A, D) + BD(A, C).$$

2°. Indien een der functies φ een macht A^n is, waarbij A een functie van de y en q wordt, heeft men

Digitized by Google

$$(A^n, \psi) = \sum_i \left(\frac{\partial A^n}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial A^n}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) =$$

$$= n A^{n-1} \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right) = n A^{n-1} (A, \psi).$$

2. *Afleiding der algemeene tangentiale transformatie uit de homogene.*

Om de algemeene transformatie

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = \frac{1}{\rho} (dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n) \quad (1)$$

te vinden, hebben wij slechts in de homogene

$$q_0 dy_0 + \ldots + q_n dy_n = Q_0 d Y_0 + \ldots + Q_n d Y_n . \quad (2)$$

te substitueeren

$$y_0 = z,\ y_1 = x_1, \ldots y_n = x_n, \qquad , -\frac{q_1}{q_0} = p_1, \ldots -\frac{q_n}{q_0} = p_n,$$

$$Y_0 = Z, Y_1 = X_1, \ldots Y_n = X_n, \frac{Q_0}{q_0} = \frac{1}{\rho}, -\frac{Q_1}{Q_0} = P_1, \ldots -\frac{Q_n}{Q_0} = P_n ; \quad (3)$$

hierdoor gaat (2) in (1) over. Daar de Y homogeen van den 0en graad in q zijn, worden Z en de X functies van z en de x, p, echter in 't algemeen geen homogene. Daar de Q homogeen van den 1en graad in de q zijn, worden ook $\frac{1}{\rho}$ en de P functies van z en de x, p.

3. *Omvorming der* (Φ, ψ) *in* $[f, g]$.

Indien Φ en ψ twee functies van de y en q zijn, homogeen van den μen en νen graad in de q, dan worden zij door de substitutie (3)

$$\Phi = q_0^{\mu} f, \qquad \psi = q_0^{\nu} g,$$

waarbij f en g functies van z, en de x, p zijn, die als functies van de y en q beschouwd, homogeen van den 0en graad in de q zijn. Nu is

Digitized by Google

$$(\Phi,\Psi)=(q_0^{\mu}f,q_0^{\nu}g)=q_0^{\mu+\nu}(f,g)+q_0^{\mu}g\,(f,q_0^{\nu})+q_0^{\nu}f(q_0^{\mu},g)+f\,g(q_0^{\mu},q_0^{\nu})$$

$$=q_0^{\mu+\nu}(f,g)+\nu q_0^{\mu+\nu-1}g(f,q_0)+\mu q_0^{\mu+\nu-1}f(q_0,g)+\mu\nu q_0^{\mu+\nu-2}f,g(q_0,q_0)$$

$$=q_0^{\mu+\nu}(f,g)+\nu q_0^{\mu+\nu-1}g\,\frac{\partial f}{\partial y_0}-\mu q_0^{\mu+\nu-1}f\frac{\partial g}{\partial y_0},$$

waarbij f,g nog als functies van de y,q beschouwd zijn.

Beschouwt men nu echter f,g als functies van z en de x,p, dan is

$$\frac{\partial}{\partial q_1}=-\frac{1}{q_0}\frac{\partial}{\partial p_1},\ \ldots\ .\frac{\partial}{\partial q_n}=-\frac{1}{q_0}\frac{\partial}{\partial p_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_0}=\frac{q_1}{q_0^2}\frac{\partial}{\partial p_1}+\ldots.+\frac{q_n}{q_0^2}\frac{\partial}{\partial p_n}=-\frac{1}{q_0}\left(p_1\frac{\partial}{\partial p_1}+\ldots.+p_n\frac{\partial}{\partial p_n}\right).$$

Hierdoor wordt

$$(f,g)=\Sigma_{i=0}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)=$$

$$=-\frac{1}{q^0}\Sigma_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

$$-\frac{1}{q_0}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\left(p_1\frac{\partial g}{\partial p_1}+\ldots.+p^n\frac{\partial g}{\partial p_n}\right)-\frac{\partial g}{\partial z}\left(p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+\ldots.+p^n\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{q_0}\Sigma_{i=1}^{i=n}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right\}.$$

Voeren wij nu de verkorte schrijfwijze in

$$[f,g]=\Sigma_{i=1}^{i=n}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right\},\quad(4)$$

waaruit onmiddellijk blijkt

$$[f,f]=0\qquad\text{en}\quad[g,f]=-[f,g];$$

dan komt er

$$(f,g)=-\frac{1}{q_0}[f,g].$$

Hierdoor gaat (Φ,ψ) over in

$$(\Phi,\psi)=-q_0^{\mu+\nu-1}\left\{[f,g]+\mu f\frac{\partial g}{\partial z}-\nu g\frac{\partial f}{\partial z}\right\}.\quad.\quad.\quad(5)$$

Digitized by Google

4. *Vervorming der* (Y, Y), (Y, Q), (Q, Q).

Passen wij de zoo even gevonden formule toe door voor φ, ψ te nemen de Y en Q, dan komt er, steeds i, k grooter dan 0 nemende,

$$(Y_0, Y_i) = -\frac{1}{q_0}[Z, X_i], \text{ dus } [Z, X_i] = 0;$$

$$(Y_i, Y_k) = -\frac{1}{q_0}[X_i, X_k], \text{ dus } [X_i, X_k] = 0;$$

$$(Y_0, Q_0) = -\left[Z, \frac{1}{\rho}\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial z}, \text{ dus } \left[Z, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial z} - 1;$$

$$(Y_i, Q_0) = -\left[X_i, \frac{1}{\rho}\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial X_i}{\partial z}, \text{ dus } \left[X_i, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial X_i}{\partial z};$$

$$(Y_0, Q_k) = (Y_0, -Q_0 P_k) = -Q_0 (Y_0, P_k) - P_k (Y_0, Q_0) =$$
$$= \frac{Q_0}{q_0}[Z, P_k] - P_k, \text{ dus } [Z, P_k] = \rho P_k;$$

$$(Y_i, Q_k) = (Y_i, -Q_0 P_k) = -Q_0 (Y_i, P_k) - P_k (Y_i, Q_0) =$$
$$= \frac{Q_0}{q_0}[X_i, P_k], \text{ dus } [X_i, P_k] = \begin{cases} 0, & i \lesseqgtr k \\ \rho, & i = k \end{cases};$$

$$(Q_0, Q_i) = (Q_0, -Q_0 P_i) = -Q_0 (Q_0, P_i) = \frac{Q_0}{q^0}\left[\frac{1}{\rho}, P\right] +$$
$$+ \frac{Q_0}{q_0}\frac{\partial P_i}{\partial z}, \text{ dus } \left[\frac{1}{\rho}, P_i\right] = -\frac{\partial P_i}{\partial z};$$

$$(Q_i, Q_k) = (-Q_0 P_i, -Q_0 P_k) = Q_0^2 (P_i, P_k) + Q_0 P_k (P_i, Q_0) +$$
$$+ Q_0 P_i (Q_0, P_k) = -\frac{Q_0^2}{q_0^2}[P_i, P_k], \text{ dus } [P_i, P_k] = 0;$$

waarbij wij gebruik gemaakt hebben van de formulen (8′) uit hoofdstuk VI.

5. *Onafhankelijkheid van* Z *en de* X, P.

Uit de onafhankelijkheid der Y, Q, uitgedrukt door (VI, 8)

$$D\frac{Y_0, Y_1 \ldots . Y_n, Q_0, Q_1 \ldots . Q_n}{y_0, y_1 \ldots . y_n, q_0, q_1 \ldots q_n} \gtrless 0,$$

volgt, zooals wij bewijzen zullen, de onafhankelijkheid van de Z en de X, P, beschouwd als functies van z en de x, p.

Digitized by Google

Volgens een bekende eigenschap der functionaaldeterminanten is

$$D\frac{Y_0, Y_1, \ldots Y_n, Q_0, Q_1, \ldots Q_n}{y_0, y_1, \ldots y_n, q_0, q_1, \ldots q_n} = D\frac{Y_0, Y_1, \ldots Y_n, Q_0, Q_1, \ldots Q_n}{Z, X_1, \ldots X_n, Q_0, P_1, \ldots P_n}$$

$$\times D\frac{Z, X_1, \ldots X_n, Q_0, P_1, \ldots P_n}{z, x_1, \ldots x_n, q_0, p_1, \ldots p_n} \times D\frac{z, x_1, \ldots x_n, q_0, p_1, \ldots p_n}{y_0, y_1, \ldots y_n, q_0, q_1, \ldots q_n}.$$

Maar

$$D\frac{Y_0, Y_1, \ldots Y_n, Q_0, Q_1, \ldots Q_n}{Z, X_1, \ldots X_n, Q_0, P_1, \ldots P_n} = D\frac{Z, X_1, \ldots X_n Q_0, -P_1 Q_0, \ldots -P_n Q_0}{Z, X_1, \ldots X_n Q_0, P_1, \ldots P_n} = (-Q_0)^n;$$

$$D\frac{Z, X_1, \ldots X_n, Q_0, P_1, \ldots P_n}{z, x_1, \ldots x_n, q_0, p_1, \ldots p_n} = D\frac{Z, X_1, \ldots X_n, \frac{Q_0}{\rho}, P_1 \ldots P_n}{z, x_1, \ldots x_n, q_0, p_1, \ldots p_n}$$

$$= \frac{1}{\rho} D\frac{Z, X_1, \ldots X_n P_1, \ldots P_n}{z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n};$$

$$D\frac{z, x_1, \ldots x_n, q_0, p_1, \ldots p_n}{y_0, y_1, \ldots y_n, q_0, q_1, \ldots q_n} = D\frac{y_0, y_1, \ldots y_n, q_0, -\frac{q_1}{q_0}, \ldots -\frac{q_n}{q_0}}{y_0, y_1, \ldots y_n, q_0, q_1, \ldots q_n} = \left(-\frac{1}{q_0}\right)^n.$$

Hierdoor wordt

$$D\frac{Y_0, Y_1, \ldots Y_n, Q_0, Q_1, \ldots Q_n}{y_0, y_1, \ldots y_n, q_0, q_1, \ldots q_n} = \frac{1}{\rho^{n+1}} D\frac{Z, X_1, \ldots X_n, P_1, \ldots P_n}{z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n}.$$

Daar de eerste determinant niet nul kan worden, is dit ook met den laatsten 't geval, waarmede de onafhankelijkheid van Z en de X, P bewezen is.

6. *Theorema.*

Uit VI. 10 volgt nu het volgende theorema.

Opdat eenige functies Z, X, P van z en de x, p voldoen aan

$$dz - \Sigma_{i=1}^{i=n} p_i\, dx_i = \frac{1}{\rho}(dZ - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i\, d\, X_i), \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

is het noodig en voldoende, dat Z en de X, P onderling onafhankelijk zijn, en aan de volgende vergelijkingen voldoen ($i,k=1,\ldots n$)

Digitized by Google

$$[X_i, X_k] = 0, \quad [Z, X_k] = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6a)$$

$$[X_i, P_k] = \begin{cases} 0, & i \gtrless k \\ 1, & i = k \end{cases}, \quad [Z, P_k] = \rho P_k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6b)$$

$$[P_i, P_k] = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6c)$$

$$\left[X_i, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial X_i}{\partial z}, \quad \left[Z, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial z} - 1, \left[P_i, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{\partial P_i}{\partial z}. \quad (6d)$$

7. *Het vinden der* P *uit lineaire vergelijkingen.*

Uit VI. 11 volgt, dat, zoodra onderling onafhankelijke functies Z en de X gevonden zijn, die voldoen aan

$$[X_i, X_k] = 0, \qquad [Z, X_k] = 0,$$

de P en ρ uit lineaire vergelijkingen te vinden zijn, namelijk uit

$$\frac{\partial Z}{\partial x_k} - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = -\rho p_k,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = \rho,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_k} - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0;$$

van welke $2n+1$ vergelijkingen er $n+1$ onderling onafhankelijk zijn.

Nog gemakkelijker zijn de volgende. Eerst bepaalt men de P uit n der vergelijkingen

$$\frac{\partial Z}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial Z}{\partial z} - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial X_i}{\partial z}\right) = 0, \frac{\partial Z}{\partial p_k} - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0; \quad (7a)$$

daarna ρ uit

$$\rho = \frac{\partial Z}{\partial z} - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial z}. \quad \ldots\ldots \quad (7b)$$

8. *Theorema.*

Uit VI, 12 volgt dus het onderstaande theorema.

Om de tangentiale transformatie

$$dz - \Sigma_{i=1}^{i=n} p_i \, dx_i = \frac{1}{\rho}\,(dZ - \Sigma_{i=1}^{i=n} P_i \, dX_i) \quad \ldots \quad (1)$$

Digitized by Google

te vinden, is het noodig $n+1$ onderling onafhankelijke functies Z en de X te vinden, die voldoen aan

$$[X_i, X_k] = 0, \qquad [Z, X_k] = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

daarna worden de P uit de lineaire vergelijkingen ($7a$) en ρ uit de vergelijking ($7b$) gevonden. De aldus gevonden P zijn onderling en van Z en de X onafhankelijk, en voldoen aan

$$[X_i, P_k] = \begin{cases} 0, & i \gtrless k \\ 1, & i = k \end{cases}, \quad [Z, P_k] = \rho P_k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

$$[P_i, P_k] = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6c)$$

$$\left[X_i, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial z}, \quad \left[Z, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial z} - 1, \left[P_i, \frac{1}{\rho}\right] = \frac{\partial P_i}{\partial z}. \quad (6d)$$

9. *Opmerking.*

Uit de vergelijkingen (6′) van VI, 5 volgt ($\alpha = 1, \ldots . n$)

$$-\frac{\partial X_1}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial P_1} \frac{\partial P_1}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial z} = \frac{\partial q_0}{\partial Q_1},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_\alpha} = \frac{-\partial (p_\alpha q_0)}{\partial Q_1} = -q_0 \frac{\partial p_\alpha}{\partial Q_1} - p_\alpha \frac{\partial q_0}{\partial Q_1},$$

of

$$\frac{1}{q_0} \frac{\partial X_1}{\partial p_\alpha} = -\frac{1}{Q_0} \frac{\partial x_\alpha}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial z} = \frac{\partial q_0}{\partial Q_1},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_\alpha} = \frac{q_0}{Q_0} \frac{\partial p_\alpha}{\partial P_1} - p_\alpha \frac{\partial q_0}{\partial Q_1};$$

waaruit men afleiden kan

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_\alpha} = -\rho \frac{\partial x_\alpha}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial X_1}{\partial z} = \rho \frac{\partial p_\alpha}{\partial P_1}, \quad . \quad (8)$$

die wij later gebruiken zullen.

Digitized by Google

10. *Derde vorm der tangentiale transformatie.*

In 't bijzonder geval, dat z alleen in Z voorkomt, niet in de X, P, wordt de laatste vergelijking (7)

$$\rho = \frac{\partial Z}{\partial z};$$

maar volgens (6) is

$$\rho = [X_i, P_i],$$

dus moet ρ vrij van z zijn; daaruit volgt

$$Z = \rho z - \Phi(x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n), \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waarbij Φ een willekeurige functie voorstelt.

Nu worden de vergelijkingen (7), die de P bepalen,

$$z \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + p_k \rho - \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = 0,$$

$$z \frac{\partial \rho}{\partial p_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} - \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0;$$

in al deze vergelijkingen is de eerste term de eenige, waarin z voorkomt; deze termen moeten dus nul zijn, d. i.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial p_k} = 0,$$

waaruit blijkt, dat ρ een standvastige is, die wij A zullen noemen; hierdoor gaan de vergelijkingen, die de P bepalen, over in

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = A p_k, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} + \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0.$$

Is omgekeerd z van den vorm (9), waarin ρ een standvastige A is, dan volgt uit de vergelijkingen (6*d*), dat de X en P vrij van z zijn.

De tangentiale transformatie kan dan ook (vergelijk V. 1 en

Digitized by Google

VI. 1) in een meer eenvoudigen vorm geschreven worden (waarin s niet meer voorkomt)

$$\sum_i p_i\, d\, x_i = \frac{1}{A}\,(d\,\Phi + \sum_i P_i\, d\, X_i),$$

of even algemeen, daar men A in Φ en de P opgenomen kan denken,

$$\sum_i p_i\, d\, x_i = d\,\Phi + \sum_i P_i\, d\, X_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

11. *Theorema.*

Uit § 6 en 8 volgt dus voor dit bijzonder geval het volgende theorema.

Om de tangentiale transformatie

$$\sum_i p_i\, d\, x_i = d\,\Phi + \sum_i P_i\, d\, X_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

te vinden, is het voldoende n onderling onafhankelijke functies X te vinden, die voldoen aan

$$(X_i, X_k) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

en daarna een functie Φ, die voldoet aan

$$(\Phi, X_k) = \sum_i p_i \frac{\partial X_k}{\partial p_i}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

daarna worden de P uit lineaire vergelijkingen gevonden. De aldus gevonden P zullen voldoen aan

$$(X_i, P_k) = \begin{cases} 0, i \gtrless k \\ 1, i = k \end{cases} \qquad (\Phi, P_k) = \sum_i p_i \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - P_k.$$

12. *Φ wordt door een quadratuur bepaald.*

Φ kan nog gemakkelijker dan op de bovengenoemde wijze gevonden worden; wij kunnen ons door middel der gevonden X de p in de x, X uitgedrukt denken; dan kan men de gezochte Φ ook, in plaats van als functie van de x, p, als functie van de x, X beschouwen, die ook onderling onafhankelijk zijn. Schrijven wij nu (10) aldus

$$d\,\Phi = p_1\, d\, x_1 + \ldots + p_n\, d\, x_n - P_1\, d\, X_1 - \ldots . - P_n\, d\, X_n,$$

Digitized by Google

dan is het tweede lid de volledige differentiaal van φ, beschouwd als functie van de x, X. Wij kunnen beginnen φ te vinden, inzoover zij afhangt van de integratie van

$$d\varphi = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

de X zoolang als standvastig beschouwende. Door integratie vindt men

$$\varphi = f(x_1, \ldots x_n, X_1 \ldots X_n) + \chi(X_1, \ldots X_n),$$

waarbij f een bepaalde, door de integratie gevonden, maar χ een willekeurige functie is.

Vervolgens kan men de P vinden, door middel van (10), uit de vergelijkingen

$$P_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial X_i}.$$

Ten slotte moet men in φ en de P, die als functies van de x, X gevonden zijn, de X weer door hunne uitdrukkingen in de x, p vervangen.

13. *Het vinden van φ. Algemeen geval.*

De redeneering der vorige § rustte op de onderstelling, dat het mogelijk is uit

$$X_1 = \varphi_1(x_1, \ldots x_n), \ldots X_n = \varphi_n(p_1, \ldots p_n)$$

de p in de x, X uit te drukken; of anders, dat het niet mogelijk is uit deze vergelijkingen een vergelijking zonder de p af te leiden; zoodat dus de x, X onderling onafhankelijk zijn. Is dit niet het geval, dan kan men toch altijd uit deze vergelijkingen eenige p en x met verschillende aanwijzers in de overige p, x en in de X uitdrukken (zooals wij in XIV, 3 bewijzen zullen). Stellen wij, dat op deze wijze $x_1, \ldots x_r$, $p_{r+1}, \ldots p_n$ in $x_{r+1}, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_r$ uitgedrukt zijn; zoodat dus laatstgenoemde grootheden en $X_1, \ldots X_n$ onderling afhankelijk zijn. Nu schrijven wij in plaats van (10)

Digitized by Google

$$d(\varphi - x_1 p_1 - \ldots - x_r p_r) = -x_1 dp_1 - \ldots$$
$$\ldots - x_r dp_r + p_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + p_n dx_n - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n ;$$

hier is het tweede lid de volledige differentiaal van

$$\psi = \varphi - x_1 p_1 - \ldots - x_r p_r,$$

die men als functie van $p_1, \ldots p_r, x_r + 1, \ldots x_n, X_1, \ldots X_n$ beschouwen kan. Verder wordt dit geval als het voorgaande behandeld.

Blijkbaar is hier eenvoudig een tangentiale transformatie toegepast, waarbij, in plaats van

$$\varphi, x_1, \ldots x_r, x_r + 1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_r, p_r + 1, \ldots p_n,$$

als veranderlijken ingevoerd zijn

$$\psi, p_1, \ldots p_r, x_r + 1, \ldots x_n, x_1, \ldots x_r, p_r + 1, \ldots p_n.$$

Digitized by Google

ACHTSTE HOOFDSTUK.

Eigenschappen der functies (φ, ψ), $[f, g]$.

---

1. *Invoeren van nieuwe veranderlijken in* (φ, ψ).

Indien φ en ψ functies zijn van $u_0, u_1, \ldots u_m$, en deze weer functies van $y_0, y_1, \ldots y_n, q_0, q_1, \ldots q_n$; dan heeft men

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{i=n} \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dy_i}, & \frac{d\psi}{dy_i} \\ \frac{d\varphi}{dq_i}, & \frac{d\psi}{dq_i} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial y_i} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial y_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial y_i} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial y_i} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial q_i} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial q_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial q_i} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial q_i} \end{vmatrix}.$$

Elk der $n+1$ determinanten bestaat uit termen, die den vorm hebben

$$\pm \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial q_i};$$

bij een term met het teeken $+$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial q_i}$$

is altijd een overeenkomstige term met het teeken $-$ te vinden, namelijk

Digitized by Google

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial y_i};$$

beide termen samenvoegende, komt er

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial u_\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial q_i}-\frac{\partial u_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial y_i}\right).$$

Voegt men de termen met gelijke α, β van de verschillende determinanten bijeen, dan geeft dit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial u_\beta}\sum_i\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial q_i}-\frac{\partial u_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial y_i}\right)=\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial u_\beta}(u_\alpha, u_\beta).$$

Dus wordt ten slotte

$$(\Phi, \psi)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\sum_{\beta=0}^{\beta=m}\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial u_\beta}(u_\alpha, u_\beta). \quad . \quad . \quad (1)$$

Twee bijzondere gevallen van deze formule hebben wij reeds in VII, 1 bewezen.

2. (Φ, ψ) *is invariant bij homogene tangentiale transformatie.*

Indien men door middel van een homogene tangentiale transformatie

$$\Sigma q\, dy=\Sigma q'\, dy' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

in Φ en ψ de y, q door de y', q' vervangt; dan behoudt de uitdrukking (Φ, ψ) denzelfden vorm, hetzij men Φ en ψ als functies van de y, q of van de y', q' beschouwt,

$$(\Phi, \psi)_{y\,q}=(\Phi, \psi)_{y'\,q'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin de aanwijzers y, q en y', q' aanduiden, wat de veranderlijken zijn.

Dit bewijst men aldus.

Om $(\Phi, \psi)_{y', q'}$ te vinden, denke men zich Φ, ψ als functies van de y, q en deze weder als functies van de y', q'; hierdoor wordt volgens § 1

Digitized by Google

$$(\Phi, \Psi)_{y'q'} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \sum_{\beta=0}^{\beta=n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial y_\beta} (y_\alpha, y_\beta)_{y',q'} +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial q_\beta} (y_\alpha, q_\beta) + \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial y_\beta} (q_\alpha, y_\beta) +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial q_\beta} (q_\alpha, q_\beta).$$

Uit de tangentiale transformatie volgt echter

$$(y_\alpha, y_\beta) = 0, \qquad (y_\alpha, q_\beta) = \begin{cases} 0, \alpha \gtrless \beta \\ 1, \alpha = \beta \end{cases}, \qquad (q_\alpha, q_\beta) = 0.$$

Dus blijven in het tweede lid alleen de termen, die een (y, q) bevatten, waarin y en q gelijke aanwijzers hebben. Zoodat men ten slotte heeft

$$(\Phi, \Psi)_{y',q'} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial y_\alpha} \right) = (\Phi, \Psi)_{y,q}.$$

3. *Lineaire* Φ, Ψ.

Indien Φ en Ψ beide lineair in de q zijn,

$\Phi = a_0 q_0 + a_1 q_1 + \ldots + a_n q_n, \quad \Psi = b_0 q_0 + b_1 q_1 + \ldots + b_n q_n,$

waarbij de a, b functies van de y zijn, wordt

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{i=0}^{i=n} \left(b_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - a_i \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right);$$

of deze uitdrukking, die ook lineair in de q is, naar de q rangschikkende,

$$(\Phi, \Psi) = \sum_i \left(b_i \frac{\partial a_0}{\partial y_i} - a_i \frac{\partial b_0}{\partial y_i} \right) q_0 + \ldots$$

$$\ldots + \sum_i \left(b_i \frac{\partial a_n}{\partial y_i} - a_i \frac{\partial b_n}{\partial y_i} \right) q_n.$$

Beschouwt men nu $q_0, \ldots q_n$ als gedeeltelijke differentiaalquotienten $\frac{dV}{dy_0}, \frac{dV}{dy_1}, \ldots \frac{dV}{dy_n}$ eener functie V van $y_0, \ldots y_n$, en schrijven wij voor Φ en Ψ AV en BV; dan is

$$AV = a_0 \frac{dV}{dy_0} + \ldots + a_n \frac{dV}{dy_n}, \quad BV = b_0 \frac{dV}{dy_n} + \ldots + b_n \frac{dV}{dy_n}.$$

Digitized by Google

Hierdoor wordt

$$(\varphi,\psi)\equiv(A,B)=(Ba_0-Ab_0)q_0+\ldots.+(Ba_n-Ab_n)q_n, \quad (4)$$

omdat

$$Ab_k=a_0\frac{db_k}{dy_0}+\ldots.+a_n\frac{db_k}{dy_n},$$

$$Ba_k=b_0\frac{da_k}{dy_0}+\ldots.+b_n\frac{da_k}{dy_n};$$

daar $\frac{\partial}{\partial y}$ en $\frac{d}{dy}$ hier niet in beteekenis verschillen.

Verder wordt

$$(A,B)=B(a_0q_0+\ldots.+a_nq_n)-a_0Bq_0-\ldots.-a_nBq_n$$
$$-A(b_0q_0+\ldots.+b_nq_n)+b_0Aq_0+\ldots.+b_nAq_n.$$

Daar in $b_0Aq_0+\ldots.+b_nAq_n$ alle mogelijke termen van den vorm $a_\alpha b_\beta\frac{d^2V}{dq_\alpha dq_\beta}$ voorkomen, terwijl in $a_0Bq_0+\ldots.$ $\ldots.+a_nBq_n$ hetzelfde 't geval is, zullen deze beide uitdrukkingen, daar zij met tegengestelde teekens voorkomen, elkander in (φ,ψ) opheffen. Hierdoor wordt

$$(\varphi,\psi)\equiv(A,B)=AB-BA. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

4. *Theorema van* Poisson—Jacobi.

Dit theorema leert, dat, als φ, ψ, χ willekeurige functies van de y, q zijn,

$$\Big(\varphi,(\psi,\chi)\Big)+\Big(\psi,(\chi,\varphi)\Big)+\Big(\chi,(\varphi,\psi)\Big)=0.$$

Elke term van het eerste lid zal een tweede differentiaalquotient van φ, ψ of χ bevatten; indien wij nu tevens kunnen bewijzen, dat er geen tweede differentiaalquotienten in kunnen voorkomen, dan moet het eerste lid nul zijn. Dit bewijs is aldus.

De tweede differentiaalquotienten van χ zullen afkomstig zijn uit

$$\Big(\varphi,(\psi,\chi)\Big)+\Big(\psi,(\chi,\varphi)\Big)=\Big(\varphi,(\psi,\chi)\Big)-\Big(\psi,(\varphi,\chi)\Big). \quad (6)$$

Digitized by Google

Maar (Φ, χ) en (ψ, χ) zijn lineair in de gedeeltelijke differentiaalquotienten van χ naar de y en q. Stellen wij nu

$$(\Phi, \chi) = a_0 \frac{\partial \chi}{\partial y_0} + \ldots + a_n \frac{\partial \chi}{\partial y_n} + b_0 \frac{\partial \chi}{\partial q_0} + \ldots + b_n \frac{\partial \chi}{\partial q_n} = L\chi,$$

$$(\psi, \chi) = c_0 \frac{\partial \chi}{\partial y_0} + \ldots + c_n \frac{\partial \chi}{\partial y_n} + d_0 \frac{\partial \chi}{\partial q_0} + \ldots + d_n \frac{\partial \chi}{\partial q_n} = M\chi;$$

dan wordt

$$\Big(\Phi, (\psi, \chi)\Big) - \Big(\psi, (\Phi, \chi)\Big) = (\Phi, M) - (\psi, L) = LM - ML,$$

in welke uitdrukking, blijkens de vorige §, geen tweede differentiaalquotienten meer voorkomen.

5. *Eigenschappen der uitdrukkingen* [f, g].

Uit elk der eigenschappen van de uitdrukkingen (Φ, ψ) leidt men onmiddellijk een overeenkomstige eigenschap der $[f, g]$ af, mits men de Φ, ψ homogeen kiest

$$\Phi = q_0^{\mu} f, \qquad \psi = q_0^{\nu} g,$$

waarbij f en g functies van den 0^{en} graad in de q zijn, die door de substitutie (VII, 2)

$$y_0 = z,\ y_1 = x_1, \ldots . y_n = x_n, \ -\frac{q_1}{q_0} = p_1, \ldots - \frac{q_n}{q_0} = p_n$$

in functies van z en de x, p overgaan; hierbij wordt (VII, 3)

$$(\Phi, \psi) = -q_0^{\mu+\nu-1} [f, g] + q_0^{\mu+\nu-1} \left(\nu g \frac{\partial f}{\partial z} - \mu f \frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

1°. Uit (3) leidt men, voor Φ en ψ functies van den 0^{en} graad in de q nemende, af, dat door een algemeene tangentiale transformatie

$$dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{\rho} (dz' - \Sigma p'\, dx'),$$

die uit de transformatie (2) ontstaat door bovengenoemde substitutie in verband met

Digitized by Google

$$y_0' = z',\ y_1' = x_1', \ldots y_n' = x_n', -\frac{q_1'}{q_0'} = p_1', \ldots -\frac{q_n'}{q_0'} = p_n',$$

$$\text{en} \quad \frac{q_0'}{q_0} = \frac{1}{\rho},$$

$[f.g]$ in een vorm van dezelfde gedaante overgaat, nu echter vermenigvuldigd met een factor ρ

$$[f, g]_{z\,x\,p} = \rho\,[f, g]_{z'x'p'}.$$

2°. Neemt men voor Φ, ψ, χ weer functies van den 0en graad in de q, die als functies van z en de x, p beschouwd f, g, h heeten, dan is

$$\Big(\Phi, (\chi, \psi)\Big) = \Big(\Phi, -\frac{1}{q_0}[g, h]\Big) = \frac{1}{{q_0}^2}\Big[f,\ [g, h]\Big] + \frac{1}{{q_0}^2}[g, h]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

In verband hiermede volgt uit (6)

$$\Big[f, [g, h]\Big] + \Big[g, [h, f]\Big] + \Big[h, [f, g]\Big] +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}[g, h] + \frac{\partial g}{\partial z}[h, f] + \frac{\partial h}{d z}[f, g] = 0.$$

Dit is het theorema van JACOBI-POISSON in den algemeensten vorm.

Digitized by Google

NEGENDE HOOFDSTUK.

Lineaire vergelijkingen.

---

1. *Ontstaan der lineaire vergelijkingen.*

Wij hebben in II, 6 gezien, dat men een lineaire differenvergelijking verkrijgt, als men uitgaat van een volledige oplossing, uit n vergelijkingen bestaande,

$$\psi = a, \psi_1 = a_1, \ldots \psi_{n-1} = a_{n-1}. \quad \ldots \quad (1)$$

De vergelijking wordt gevonden door eliminatie van $\rho, P_1, \ldots P_{n-1}$ tusschen

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{\partial \psi}{\partial z} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \ldots - P_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z}, \\ -\rho p_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \ldots - P_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\rho p_n &= \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - P_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \ldots - P_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

of van $\mu, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ tusschen

$$\left.\begin{aligned} 1 - \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \ldots - \mu_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z} &= 0, \\ -p_1 - \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \ldots - \mu_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -p_n - \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \ldots - \mu_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

Digitized by Google

Dit geeft

$$\begin{vmatrix} -1, \frac{\partial \psi}{\partial z}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \ldots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z} \\ p_1, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}, \ldots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0; \quad (3)$$

dus een lineaire vergelijking

$$M = M_1 p_1 + \ldots + M_n p_n, \quad \ldots \quad (3')$$

waarbij

$$M = D \frac{\psi, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}}{x_1, \ldots x_n} \qquad M_i = D \frac{\psi, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}}{z, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n}.$$

De hierbij behoorende tangentiale transformatie wordt

$$dz - \Sigma p dx = \mu d\psi + \mu_1 d\psi_1 + \ldots + \mu_{n-1} d\psi_{n-1} + \mu_n d\psi_n;$$

wanneer wij, de standvastige, die nog in de ψ voorkomt, a_n noemende, stellen

$$-\mu_n = \mu \frac{\partial \psi}{\partial a_n} + \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_n} + \ldots + \mu_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial a_n}$$

en wanneer men zich a_n uit de differentiaalvergelijking (3') opgelost denkt, gevende

$$a_n = \psi_n,$$

en in de overige ψ en in de μ gesubstitueerd.

2. *Algemeene oplossing.*

Volgens IV, 2 vindt men de algemeene integraal door een willekeurige betrekking tusschen de $\psi, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}$ aan te nemen

$$f(\psi, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}) = 0, \quad \ldots \quad (4)$$

en dan de volgende vergelijkingen toe te voegen, λ een willekeurige factor zijnde,

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \mu + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} &= 0, \\ \mu_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi_1} &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \mu_{n-1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi_{n-1}} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De algemeene oplossing vindt men door eliminatie van λ en de p tusschen (4) en (5).

Maar wij zullen bewijzen, dat hier (4) zelf de algemeene oplossing is, omdat de vergelijkingen (5) geen vergelijking zonder de p kunnen opleveren. In plaats toch van eerst de μ op te lossen uit (2′) en daarna uit (5) de p te elimineeren, kan men de μ uit (5) oplossen, in (2′) substitueeren en dan tot de eliminatie overgaan. Hierdoor worden de vergelijkingen (2′)

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \ldots\ldots + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z} &= 0, \\ -p_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} &= 0, \\ \cdot & \\ -p_n + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \ldots\ldots + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} &= 0; \end{aligned}$$

of, daar

$$\frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial} + \frac{\partial f}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \psi_{n-1}}\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial} = \frac{df}{d}$$

is, kan men hiervoor ook schrijven

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \frac{df}{dz} &= 0, \\ -p_1 + \lambda \frac{df}{dx_1} &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ -p_n + \lambda \frac{df}{dx_n} &= 0; \end{aligned}$$

Digitized by Google

waaruit onmiddellijk blijkt, dat het niet mogelijk is, uit deze vergelijkingen door eliminatie van λ en de p een vergelijking tusschen z en de x af te leiden.

Om dus de algemeene oplossing te verkrijgen der lineaire vergelijking (3'), waarvan (1) de volledige oplossing in n vergelijkingen is, heeft men slechts een willekeurige betrekking (4) tusschen de ψ aan te nemen.

In de vergelijking (4) is ieder der vergelijkingen (1) één voor één begrepen; waaruit blijkt, dat elk hunner op zich zelf een oplossing van (3) is, hetgeen ook rechtstreeks in te zien is, daar b.v. $\psi = a$ geeft

$$p_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} : \frac{\partial \psi}{dz}, \ldots . p_n = -\frac{\partial \psi}{\partial x_n} : \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

die blijkbaar den determinant in het eerste lid van (3) nul maken, dus aan (3') voldoen. Evenzoo kan het van (4) zelf blijken.

De bovenstaande redeneering steunt op de onderstelling, dat z in ψ voorkomt; is dit niet het geval, dan wordt $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, dus worden de p ∞, zoodat men geen eigenlijke oplossing meer heeft.

3. *Door combinatie van* n *bijzondere oplossingen verkrijgt men een volledige oplossing.*

Omgekeerd heeft men, om een lineaire differentiaalvergelijking (3') te integreeren, slechts n onderling onafhankelijke functies Φ te zoeken, die, ieder voor zich aan een standvastige gelijk gesteld zijnde, een oplossing van (3') geven; dan zal

$$\psi = a, \ \psi_1 = a_1, \ldots . \psi_{n-1} = a_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

de volledige oplossing zijn.

Want als $\psi = a$ een oplossing is, moeten

$$1 + \lambda \frac{d\psi}{dz} = 0,$$

$$-p_1 + \lambda \frac{d\psi}{dx_1} = 0,$$

. . . . . .

Digitized by Google

$$-p_n + \lambda \frac{d\psi}{dx_n} = 0$$

aan de differentiaalvergelijking voldoen; dus heeft men

$$M\frac{d\psi}{dz} + M_1\frac{d\psi}{dx_1} + \ldots + M_n\frac{d\psi}{dx_n} = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

Als $\psi_i = a$ een oplossing is, heeft men eveneens

$$M\frac{d\psi_i}{dz} + M_1\frac{d\psi_i}{dx_1} + \ldots + M_n\frac{d\psi_i}{dx_n} = 0 \quad \ldots \quad (7')$$

Opdat echter (6) eene oplossing zij, moeten

$$1 + \lambda\frac{d\psi}{dz} + \lambda_1\frac{d\psi_1}{dz} + \ldots + \lambda_n\frac{d\psi_n}{dz} = 0,$$

$$-p_1 + \lambda\frac{d\psi}{dx_1} + \lambda_1\frac{d\psi_1}{dx_1} + \ldots + \lambda_n\frac{d\psi_n}{dx_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-p_n + \lambda\frac{d\psi}{dx_n} + \lambda_1\frac{d\psi_1}{dx_n} + \ldots + \lambda_n\frac{d\psi_n}{dx_n} = 0,$$

aan de differentiaalvergelijking voldoen; dus moet

$$\lambda\left(M\frac{d\psi}{dz} + M_1\frac{d\psi}{dx_1} + \ldots + M_n\frac{d\psi}{dx_n}\right)$$

$$+\lambda_1\left(M\frac{d\psi_1}{dz} + M_1\frac{d\psi_1}{dx_1} + \ldots + M_n\frac{d\psi_1}{dx_n}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\lambda_n\left(M\frac{d\psi_n}{dz} + M_1\frac{d\psi_n}{dx_1} + \ldots + M_n\frac{d\psi_n}{dx_n}\right) = 0$$

zijn, hetgeen uit de vergelijkingen (7), (7') volgt.

Daar (6) een oplossing is, moet het een volledige oplossing zijn, omdat er n onafhankelijke standvastigen in voorkomen.

4. *Integratie.*

Om een volledige oplossing te vinden, is het dus voldoende n functies $\psi, \psi_1 \ldots \psi_{n-1}$ te vinden, die voldoen aan (7), (7');

Digitized by Google

maar deze vergelijkingen drukken tevens uit, dat (6) de integralen zijn van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dz}{M} = \frac{dx_1}{M_1} = \frac{dx_2}{M_2} = \ldots = \frac{dx_n}{M_n} \quad (8)$$

Zij toch $\psi = a$ een integraal dezer vergelijkingen, dan moet door middel van (8) identiek voldaan worden aan

$$\frac{d\psi}{dz}dz + \frac{d\psi}{dx_1}dx_1 + \ldots + \frac{d\psi}{dx_n}dx_n = 0,$$

welke vergelijking, door middel van (8), hetzelfde uitdrukt als een der vergelijkingen (7), (7').

De redeneering der voorgaande paragraaf vorderde, dat elk der ψ de z bevatte; maar deze voorwaarde kan men weglaten, omdat uit (7), (7') in elk geval volgt, dat (6) een integraal is, als slechts een der functies ψ de z bevat; en dit moet het geval zijn, als men voor de ψ de eerste leden der integralen van (8) kiest.

Wij hebben dus gevonden

De volledige oplossing eener lineaire differentiaalvergelijking

$$M = M_1 p_1 + \ldots + M_n p_n$$

is het stelsel integralen van de gewone gelijktijdige differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dz}{M} = \frac{dx_1}{M_1} = \ldots = \frac{dx_n}{M_n}.$$

5. *Oplossingen en integralen van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen.*

Een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen (8) heeft, zooals bekend is, n oplossingen, waardoor n der veranderlijken in de overblijvende en in n standvastigen uitgedrukt worden,

$$z = \Phi(x_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}), \quad x_1 = \Phi_1(x_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}), \ldots$$
$$\ldots x_{n-1} = \Phi_{n-1}(x_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}).$$

Digitized by Google

Hieruit volgen, door oplossing der standvastigen, de integralen

$$a = \psi(z, x_1, \ldots . x_n), \quad a_1 = \psi_1(z, x_1, \ldots . x_n), \ldots .$$
$$\ldots . a_{n-1} = \psi_{n-1}(z, x_1, \ldots . x_n).$$

Elke andere integraal heeft tot tweede lid een functie van $\psi, \psi_1, \ldots . \psi_{n-1}$, en omgekeerd is elke zoodanige functie, aan een standvastige gelijkgesteld, een integraal, die een der bovenstaande kan vervangen.

Hiermede komt overeen, dat elke $F(\psi, \psi_1, \ldots . \psi_{n-1})$, aan een standvastige gelijkgesteld, een oplossing van (3') geeft, en een der vergelijkingen (1) kan vervangen.

6. *Afleiding eener lineaire differentiaalvergelijking uit een volledige oplossing in één vergelijking.*

Uit III, 3 blijkt, dat men, als men (in plaats van de volledige oplossing (1)) van de volgende volledige oplossing uitgaat

$$b - \psi - \lambda_1 \psi_1 - \ldots . - \lambda_{n-1} \psi_{n-1} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

dezelfde differentiaalvergelijking (3') verkrijgt. Hierbij zijn $b, \lambda_1, \ldots . \lambda_{n-1}$ nieuwe standvastigen. Nu toch moet men $\rho, \lambda_1, \ldots . \lambda_{n-1}$ elimineeren tusschen

$$\rho = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \ldots . + \lambda_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z},$$
$$-\rho p_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots . + \lambda_{n-1} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i},$$

hetgeen weer dezelfde vergelijking als boven geeft.

7. *Homogene vergelijking zonder z.*

Is de vergelijking homogeen in de p en zonder z, dus $M = 0$, dan is een der integralen van (8) $z = a$; de overige vergelijkingen (8) vormen een stelsel zonder z. De oplossingen van (8) worden

$$z = a, \quad x_1 = \varphi_1, \ . \ . \ . \ . \ x_{n-1} = \varphi_{n-1},$$

waarbij in de φ de standvastige a niet meer voorkomt. De integralen kan men in den vorm

Digitized by Google

$$a = z, \quad a_1 = \psi_1, \ldots . a_{n-1} = \psi_{n-1} \quad . \quad . \quad (10)$$

verkrijgen, waarbij z in de ψ niet meer voorkomt.

Wij zien dus, dat men de volledige oplossing der homogene lineaire vergelijking

$$M_1 p_1 + \ldots . + M_n p_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

vindt, door aan de integralen van

$$\frac{d x_1}{M_1} = \ldots . = \frac{d x_n}{M_n}$$

toe te voegen $z = a$. De volledige oplossing in één vergelijking wordt

$$b - z - \lambda_1 \psi_1 - \ldots . - \lambda_{n-1} \psi_{n-1} = 0,$$

waarbij de ψ vrij van z zijn.

8. *Opmerking.*

Al vormen de integralen van (8) samen de volledige oplossing van (3'), toch kan men alleen die integralen van (8), welke z bevatten, als bijzondere oplossingen van (3') beschouwen; zulke integralen zijn gemakkelijk uit andere af te leiden, daar zeker één der integralen z moet bevatten. Bijzonder eenvoudig is dit, als de gegeven vergelijking homogeen is; daar uit (10) onmiddellijk volgt, dat

$$z = a, \quad z - \psi_1 = b_1, \ldots . z - \psi_{n-1} = b_{n-1}$$

een stel integralen van (8), dus elk dezer vergelijkingen een oplossing van (11) is; zoodat ook

$$z = \psi_1, \ldots . z = \psi_{n-1}$$

oplossingen van (11) zullen zijn; terwijl elke andere oplossing van den vorm $z = f(\psi, \psi_1 \ldots . \psi_{n-1})$ zijn zal.

9. *Opmerking.*

Wij hebben gezien, dat de integralen

$$\psi = a, \quad \psi_1 = a_1, \ldots . \psi_{n-1} = a_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Digitized by Google

van een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dz}{M} = \frac{dx_1}{M_1} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{M_n}. \quad \ldots \quad (8)$$

tevens de volledige oplossing vormen der lineaire gedeeltelijke differentiaalvergelijking

$$M = M_1 p_1 + \ldots\ldots + M_n p_n; \quad \ldots \quad (3')$$

d. w. z. dat men grootheden $p_1, \ldots\ldots p_n$ kan vinden, die, mits aan (3') voldoende, met behulp van (1) $dz - \Sigma p\, dx = 0$ maken; want uit (8) volgt

$$\frac{dz}{M} = \frac{dx_1}{M_1} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{M_n} = \frac{dz - p_1 dx_1 - \ldots\ldots - p_n dx_n}{M - p_1 M_1 - \ldots\ldots - p_n M_n}.$$

Evenzoo kan men uit (8) afleiden:

$$\frac{dz}{M} = \frac{dx_1}{M_1} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{M_n} = \frac{dz - p_{02} dx_2 - \ldots\ldots - p_{0n} dx_n}{M - p_{02} M_2 - \quad - p_{0n} M_n} =$$

$$= \frac{dx_1 - p_{12} dx_2 - \ldots\ldots - p_{1n} dx_n}{M - p_{12} M_2 - \ldots\ldots - p_{1n} M_n};$$

zoodat (1) een oplossing is der gelijktijdige gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen

$$M = p_{02} M_2 + \ldots\ldots + p_{0n} M_n, \qquad M_1 = p_{12} M_2 + \ldots\ldots + p_{1n} M_n,$$

waarin de zoogenaamd onafhankelijke veranderlijken $x_2, \ldots\ldots x_n$ dezelfde zijn; de afhankelijke veranderlijken z en x_1 verschillen.

Zoo voortgaande vindt men, dat (1) ook een oplossing is van

$$M = p_{03} M_3 + \ldots\ldots + p_{0n} M_n, \qquad M_1 = p_{13} M_3 + \ldots\ldots + p_{1n} M_n,$$

$$M_2 = p_{23} M_3 + \ldots\ldots + p_{2n} M_n.$$

Enz.

Herleidt men in het eerste geval de volledige oplossing tot één vergelijking, dan kan men z als functie van $x_1, \ldots\ldots x_n$ beschouwen en $p_1, \ldots\ldots p_n$ als hare gedeeltelijke differentiaalquotienten.

Herleidt men in het tweede geval (1) tot twee vergelijkingen, dan kan men z en x_1 als functies van $x_2 \ldots\ldots x_n$ beschouwen, $p_{02}, \ldots\ldots p_{0n}$ en $p_{12}, \ldots\ldots p_{1n}$ als hunne gedeeltelijke differentiaalquotienten. Enz.

Digitized by Google

Met dien verstande kan men zeggen.

De volledige oplossing (1) van (8) vormt tevens de volledige oplossing der volgende lineaire stelsels (met verschillende afhankelijke veranderlijken in de vergelijkingen van hetzelfde stelsel).

$$M = M_1 \frac{dz}{dx_1} + \ldots\ldots + M_n \frac{dz}{dx_n};$$

$$\begin{cases} M = M_2 \dfrac{dz}{dx_2} + \ldots\ldots + M_n \dfrac{dz}{dx_n}, \\ M_1 = M_2 \dfrac{dx_1}{dx_2} + \ldots\ldots + M_n \dfrac{dx_1}{dx_n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = M_3 \dfrac{dz}{dx_3} + \ldots\ldots + M_n \dfrac{dz}{dx_n}, \\ M_1 = M_3 \dfrac{dx_1}{dx_3} + \ldots\ldots + M_n \dfrac{dx_1}{dx_n}, \\ M_2 = M_3 \dfrac{dx_2}{dx_3} + \ldots\ldots + M_n \dfrac{dx_2}{dx_n}; \end{cases}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\begin{cases} M = M_n \dfrac{dz}{dx_n}, \\ M_1 = M_n \dfrac{dx_1}{dx_n}, \\ M_{n-1} = M_n \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n}. \end{cases}$$

Het laatste stelsel is (8) zelf.

Digitized by Google

TIENDE HOOFDSTUK.

Integratie der niet-lineaire differentiaalvergelijking.

---

1. *Hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen.*

Zooals wij in I, 6 en II, 1 gezien hebben, komt het vinden der volledige integraal eener differentiaalvergelijking

$$H(z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n) = a_1 \text{ of } X_1 = a_1 \quad . \quad . \quad (1)$$

neer op het vinden der tangentiale transformatie

$$dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{\rho}(dZ - \Sigma P\, dX) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wij weten verder uit VII, 8 dat de moeilijkheid alleen bestaat in het vinden van $n+1$ onderling onafhankelijke functies $Z, X_1, \ldots . X_n$, die voldoen aan

$$[Z, X_i] = 0, \qquad [X_i, X_k] = 0. \qquad (i, k = 1, \ldots . n) \quad . \quad (3)$$

Zoodra men deze gevonden heeft, kent men de volledige integraal van (1)

$$Z = a, \qquad X_2 = a_2, \ldots . X_n = a_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(terwijl men de ρ en de P uit lineaire vergelijkingen vinden kan, hoewel dit voor de integratie niet noodig is).

Daar X_1 gegeven is, vestigen wij in de eerste plaats onze aandacht op de volgende onder de vergelijkingen (3)

$$[Z, X_1] = 0, \quad [X_2, X_1] = 0, \ldots . [X_n, X_1] = 0. \quad . \quad (5)$$

Digitized by Google

Elke integratiemethode begint met het vinden van functies F, die voldoen aan

$$[F, X_1] = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

onder deze functies moeten zich $Z, X_2, \ldots . X_n$ bevinden (terwijl X_1 klaarblijkelijk een hunner is).

Schrijven wij (6) voluit, dan komt er

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}\right) \frac{\partial X_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}\right) + \ldots .$$
$$\ldots . + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}\right) \frac{\partial X_1}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_1}{\partial z}\right) = 0;$$

of anders rangschikkende, zoodat duidelijk blijkt, dat wij hier met een homogene lineaire gedeeltelijke differentiaalvergelijking te doen hebben, waarbij F de functie, z en de x, p de onafhankelijke veranderlijken zijn, en daarom tevens $\frac{\partial F}{\partial}$ door $\frac{dF}{d}$ vervangende,

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_1}\frac{dF}{dx_1} + \ldots . + \frac{\partial X_1}{\partial p_n}\frac{dF}{dx_n} + \left(p_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_1} + \ldots . p_n \frac{\partial X_1}{\partial p_n}\right)\frac{dF}{dz}$$
$$-\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)\frac{dF}{dp_1} - \ldots . - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)\frac{dF}{dp_n} = 0. \quad (7)$$

Voor de integratie van deze lineaire vergelijking is, volgens IX, 7, slechts die van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X}{\partial p_1}} = \ldots . = \frac{dx_n}{\frac{\partial X}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_1} + \ldots . + p_n \frac{\partial X_1}{\partial p_n}} =$$
$$= \frac{-dp_1}{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}} = \ldots . = \frac{-dp_n}{\frac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_1}{\partial z}}. \quad (8)$$

noodig. Zij $\psi =$ standv. een der integralen, dan is $F = \psi$ een oplossing der vergelijking (7), waarbij ψ een functie van z en de x, p voorstelt (IX, 8).

Digitized by Google

2. *Vergelijking zonder z.*

Indien de gegeven vergelijking (1) z niet bevat, is het volgens V, 1 voldoende de tangentiale transformatie

$$\Sigma p\, dx = dM + \Sigma P\, dX \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

te vinden. Hiervoor is het noodig functies X (zonder z) te vinden, die voldoen aan

$$(X_i, X_k) = 0; \qquad (i, k = 1, \ldots . n); \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

daarna wordt M door een quadratuur bepaald volgens VII, 12, en de volledige integraal van (1) wordt

$$z - M = a, \qquad X_2 = a_2, \ldots . X_n = a_n.$$

Hier moet men dus beginnen met het zoeken van functies F, die voldoen aan

$$(F, X_1) = 0;$$

onder deze functies bevinden zich $X_1, X_2, \ldots . X_n$. Deze lineaire gedeeltelijke differentiaalvergelijking wordt

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_1}\frac{dF}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial X_1}{\partial p_n}\frac{dF}{dx_n} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{dF}{dp_1} - \ldots - \frac{\partial X_1}{\partial x_n}\frac{dF}{dp_n} = 0. \quad (11)$$

Voor hare integratie is die van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_1}} = \ldots . = \frac{dx_n}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial X_1}{\partial x_1}} = \ldots . = \frac{-dp_n}{\frac{\partial X_1}{\partial x_n}} \quad . \quad (12)$$

noodig, welk stelsel ook uit (8) af te leiden, is door $\frac{\partial X_1}{\partial z} = 0$ te stellen en het lid $\frac{dz}{\Sigma p \frac{\partial X_1}{\partial p}}$ weg te laten, als zijnde het eenige, waarin z voorkomt (liet men het staan, dan zou dit hetzelfde geven als de quadratuur, waardoor wij M moeten bepalen).

Digitized by Google

3. *Homogene vergelijking.*

Is de vergelijking (1) homogeen (zonder z), dan mogen wij onderstellen, dat zij het van den 0en graad is; nu is het volgens V, 3 wenschelijk ook voor $X_2, \ldots . X_n$ homogene functies van den 0en graad te vinden; dan zal

$$p_1 d x_1 + \ldots . + p_n d x_n = P_1 d X_1 + \ldots . + P_n d X_n$$

zijn, en de volledige integraal wordt

$$z = a, \quad X_2 = a_2, \ldots . X_n = a_n$$

(zoodat het vinden van M door een quadratuur wegvalt).

Hiertoe kan men (12) aldus schrijven

$$\frac{d x_1}{p_n \frac{\partial X_1}{\partial p_1}} = \ldots . = \frac{d x_n}{p_n \frac{\partial X_1}{\partial p_n}} =$$

$$\frac{d\left(\frac{p_1}{p_n}\right)}{-\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{p_1}{p_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_n}} = \ldots = \frac{d\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)}{-\frac{\partial X_1}{\partial x_{n-1}} + \frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_n}};$$

deze vergelijkingen zijn één minder in aantal dan de vergelijkingen (8); maar er komt ook één veranderlijke minder in voor, want alle uitdrukkingen bevatten de p alleen in de verhoudingen $\frac{p_1}{p_n}, \ldots . \frac{p_{n-1}}{p_n}$; men kan dus

$$x_1, \ldots . x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots . \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

als de $2n - 1$ veranderlijken van dit stelsel aanzien; de integralen zullen dan ook alleen deze grootheden bevatten.

4. *Gelijktijdig stelsel.*

Eveneens komt het integreeren van het gelijktijdig stelsel

$$X_1 = a_1, \ldots . X_m = a_m$$

neer op het vinden der transformatie

Digitized by Google

$$dz - \Sigma p\, dx = \frac{1}{\rho}(dz - \Sigma P\, dX),$$

waarin m der X gegeven zijn.

Opdat het mogelijk zij deze transformatie te vinden, is dus noodzakelijk dat de gegeven X voldoen aan de vergelijkingen

$$[X_i, X_k] = 0;\ (i, k = 1, \ldots . m)$$

zoodra een dezer uitdrukkingen niet nul is, zal de integratie onmogelijk zijn. Zijn zij allen nul, dan gaat men verder met het zoeken van functies $Z, X_{m+1}, \ldots . X_n$, die voldoen aan

$$[Z, X_i] = 0, \quad [X_l, X_i] = 0; \quad \begin{pmatrix} l = m+1, \ldots . n \\ i = 1, \ldots . . . . . n \end{pmatrix}.$$

zijn deze functies gevonden, dan is

$$Z = a, \quad X_{m+1} = a_{m+1}, \ldots . X_n = a_n$$

de volledige integraal van het gegeven stelsel.

Digitized by Google

ELFDE HOOFDSTUK.

Methode van Cauchy.

---

1. *Volledige integratie van het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen.*

Om de volledige integraal van een differentiaalvergelijking

$$X_1 = a_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

te vinden, begint CAUCHY met de $2n+1$ onderling onafhankelijke oplossingen te vinden van

$$[F, X_1] = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

of, wat op hetzelfde neerkomt, de $2n+1$ integralen van

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\Sigma p \frac{\partial X_1}{\partial p_n}} =$$

$$= \frac{-dp_1}{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_1}{\partial z}} . \quad . \quad (3)$$

Laten de oplossingen van (3) zijn

$$x_i = f_i , \qquad z = f , \qquad p_i = \varphi_i , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarbij $f_1 , \ldots . f_{n-1} , f , \varphi_1 , \ldots . \varphi_n$, functies van x_n en $2n$ willekeurige standvastigen $c_1 , \ldots . c_{2n}$ zijn.

De integralen van (3) worden

$$u_1 = c_1 , \ldots . u_{2n} = c_{2n} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Digitized by Google

waarbij de u functies van z en de x, p zijn. Elke willekeurige functie der u, aan een standvastige gelijkgesteld, is ook een integraal van (3) en kan een der vergelijkingen (5) vervangen. Onder deze functies bevinden zich de gezochte $X_2, \ldots . X_n$, Z en ook X_1 zelf; wij mogen dus aannemen dat een der u, stel u_{2n}, X_1 voorstelt; dan is c_{2n} niet meer willekeurig, maar de rekenkundige standvastige a_1, die in (1) voorkomt. Er blijven dus $2n-1$ willekeurige standvastigen $c_1, \ldots . c_{2n-1}$ over.

2. *Invoering der integratie-standvastigen als nieuwe veranderlijken.*

Cauchy bekommert zich nu niet verder om de overige voorwaarden

$$[Z, X_i] = 0, \quad [X_k, X_i] = 0;$$

maar tracht de u zoo te bepalen, dat n der vergelijkingen (5) met (1), of wat hetzelfde is met $u_{2n} = a_1$, voldoende zijn om $dz - \Sigma p\, dx = 0$ te maken; zij zullen dan volgens I, 4 een volledige integraal van (1) opleveren.

Daartoe worden $u_1, \ldots . u_{2n-1}$, te zamen met x_n, als nieuwe veranderlijken aangenomen; voert men deze in $dz - \Sigma p\, dx$ in, gebruik makende van (1), dan vindt men een uitdrukking van den vorm

$$dz - \Sigma p\, dx = V dx_n + U_1 du_1 + \ldots + U_{2n-1}\, du_{2n-1}, \quad (6)$$

waarbij $V, U_1, \ldots . U_{2n-1}$ functies van $x_n, u_1, \ldots . u_{2n-1}$ zijn.

Daar echter de integralen (5) aan (3) voldoen, en daar uit de $n+1$ eerste vergelijkingen (3) volgt $dz - \Sigma p\, dx = 0$, blijkt, dat, als men de u standvastig neemt, het eerste lid van (6) nul moet worden, dus ook het tweede lid; maar hierin is dan $V dx_n$ de eenige overgebleven term, dus

$$V = 0.$$

Er komt dus in het tweede lid van (6) geen term met dx_n voor.

Digitized by Google

Daar elke willekeurige functie der u, aan een standvastige gelijkgesteld, een integraal van (3) is, zal zij het eerste lid van (6), en daarom ook het tweede, nul maken; hetgeen alleen mogelijk is, indien x_n alleen in een gemeenschappelijken factor der U voorkomt.

3. *Rechtstreeksch bewijs der beide voorgaande eigenschappen.*

Men kan de in de vorige § genoemde eigenschappen vollediger aldus bewijzen.

1°. Men heeft, $z, x_1, \ldots . x_{n-1}, p_1, \ldots . p_n$ als functies van $x_n, u_1, \ldots . u_{2n-1}$ beschouwende,

$$V = \frac{dz}{dx_n} - \sum_{i=1}^{i=n-1} p_i \frac{dx_i}{dx_n} - p_n. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hierin de waarden der differentiaalquotienten uit (3) substitueerende, vindt men

$$V = \frac{1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} \left(p_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_1} + \ldots . + p_n \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \right) -$$

$$- \frac{1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} \left(p_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_1} + \ldots . + p_n \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \right) = 0. \quad . \quad (8)$$

2°. Vervolgens is

$$M = \frac{dz}{du} - \sum_{i=1}^{i=n-1} p_i \frac{dx_i}{du}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Hieruit $\frac{dU}{dx_n}$ berekenende

$$\frac{dU}{dx_n} = \frac{d^2 z}{dx_n\, du} - \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(p_i \frac{d^2 x_i}{dx_n\, du} + \frac{dp_i}{dx_n} \frac{dx_i}{du} \right);$$

maar

$$p_i \frac{d^2 x_i}{dx_n\, du} = \frac{d}{du} \left(p_i \frac{dx_i}{dx_n} \right) - \frac{dp_i}{du} \frac{dx_i}{dx_n};$$

dus

Digitized by Google

$$\frac{dU}{dx_n} = \frac{d^2 z}{dx_n\, du} - \frac{d}{du}\sum_{i=1}^{i=n-1} p_i \frac{dx_i}{dx_n} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dx_n} - \frac{dp_i}{dx_n}\frac{dx_i}{du}\right) =$$
$$= \frac{d}{du}\left(\frac{dz}{dx_n} - \sum_{i=1}^{i=n-1} p_i \frac{dx_i}{dx_n}\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dx_n} - \frac{dp_i}{dx_n}\frac{dx_i}{du}\right).$$

Daar men nu, blijkens (7) en (8) heeft

$$\frac{dz}{dx_n} - \sum_{i=1}^{i=n-1} p_i \frac{dx_i}{dx_n} x_i = p_n,$$

is ook

$$\frac{dU}{dx_n} = \frac{dp_n}{du} + \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dx_n} - \frac{dp_i}{dx_n}\frac{dx_i}{du}\right).$$

Nu de waarden substitueerende der differentiaalquotienten, uit (3) verkregen,

$$\frac{dU}{dx_n} = \frac{dp_n}{du} + \frac{1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} \sum_{i=1}^{i=n-1}\left\{\frac{dp_i}{du}\frac{\partial X_1}{\partial p_1} + \frac{dx_i}{du}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)\right\} =$$
$$= \frac{dp_n}{du} + \frac{1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{du} + \frac{\partial X_1}{\partial p_i}\frac{dp_i}{du}\right) +$$
$$+ \frac{\frac{\partial X_1}{\partial z}}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} \sum_{i=1}^{i=n-1} p_i \frac{dx_i}{du}.$$

Maar tevens heeft men

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{du} + \frac{\partial X_1}{\partial p_i}\frac{dp_i}{du}\right) + \frac{\partial X_1}{\partial p_n}\frac{dp_n}{du} + \frac{\partial X_1}{\partial z}\frac{dz}{du} = \frac{dX_1}{du} = 0,$$

omdat $X_1 = a_1$ en wel identiek, als men in X_1 z en de x, p door hunne waarden in x_n en de u vervangen denkt; daar $X_1 = a_1$ zelf een der integralen van (2) is. Dus zal

Digitized by Google

$$\Sigma_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{du}+\frac{\partial X_1}{\partial p_i}\frac{dp_i}{du}\right)+\frac{\partial X_1}{\partial p_n}\frac{dp_n}{du}=-\frac{\partial X_1}{\partial z}\frac{dz}{du}$$

zijn. Hierdoor wordt

$$\frac{dU}{dx_n}=-\frac{\frac{\partial X_1}{\partial z}}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}}\frac{dz}{du}+\frac{\frac{\partial X_1}{\partial z}}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}}\Sigma_{i=1}^{i=n-1}p_i\frac{dx_i}{du}=$$

$$=-\frac{\frac{\partial X_1}{\partial z}}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}}\left(\frac{dz}{du}-\Sigma_{i=1}^{i=n-1}p_i\frac{dx_i}{du}\right).$$

En dus volgens (9)

$$\frac{dU}{dx_n}=-\frac{\frac{\partial X_1}{\partial z}}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}}U.$$

Schrijven wij de verkregen vergelijking aldus

$$\frac{\frac{dU}{dx_n}}{U}=k,$$

waarbij k geschreven wordt voor $-\frac{\partial X_1}{\partial z}:\frac{\partial X_1}{\partial p_n}$, dan volgt door integratie

$$U=Ce^{\int k\,dx_n}, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

waarin C een functie der u, doch zonder x_n, voorstelt.

Wij kunnen de onderste grens der integraal zoo kiezen, dat deze voor een bepaalde waarde γ van x_n nul wordt; dan wordt $e^{\int_\gamma^{x_n} k\,dx_n}=1$ voor $x_n=\gamma$. Men heeft dan

$$dz-\Sigma p\,dx=N(C_1\,du_1+\ldots.+C_{2n-1}\,du_{2n-1}), \quad (11)$$

waarin $N=e^{\int_\gamma^{x_n} k\,dx_n}=1$ wordt voor $x_n=\gamma$.

Digitized by Google

4. *Invoeren der aanvankelijke waarden.*

Het eigenaardige van CAUCHY's methode bestaat nu hierin, dat hij voor de standvastigen C de waarden kiest, die $x_1, \ldots . x_{n-1}$, $z, p_1, \ldots . p_{n-1}$ aannemen, als men aan x_n een bepaalde (doch willekeurige) waarde γ geeft; laten wij deze waarden, die men willekeurig kiezen kan, $x_{1,0}, \ldots . x_{n-1,0}$, $z_0, p_{1,0}, \ldots . p_{n-1,0}$ noemen. (De waarde $p_{n,0}$, die p_n voor $x_n = \gamma$ aanneemt, kan men uit (1) vinden).

Hierdoor worden de integralen van (3), behalve (1)

$$u_1 = x_{1,0}, \ldots . u_{n-1} = x_{n-1,0}, \quad u_n = z_0,$$
$$u_{n+1} = p_{1,0}, \ldots . u_{2n-1} = p_{n-1,0}.$$

Daar het eerste lid van (11) in het tweede overgaat door substitutie der waarden van z en de x, p, uitgedrukt in

$$x_n, x_{1,0}, \ldots . x_{n-1,0}, z, p_{1,0}, \ldots . p_{n-1,0},$$

of wat hetzelfde is in $x_n, u_1, \ldots . u_{2n-1}$, zal, indien wij eerst in beide leden $x_n = \gamma$ substitueeren, waardoor (11) overgaat in

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots . - p_{n-1} dx_{n-1} = C_1 du_1 + \ldots . + C_{2n-1} du_{2n-1},$$

nu het eerste lid in het tweede overgaan door een eenvoudiger substitutie, die men uit de vorige verkrijgt door overal $x_n = \gamma$ te nemen; maar daar in dit geval $x_1, \ldots . x_{n-1}, z, p_1, \ldots . p_{n-1}$ niet van $x_{1,0}, \ldots . x_{n-1,0}, z_0, p_{1,0}, \ldots . p_{n-1,0}$ verschillen, zoo wordt deze substitutie

$$x_1 = u_1, \ldots . x_{n-1} = u_{n-1}, \; z = u_n, \; p_1 = u_{n+1}, \ldots . p_{n-1} = u_{2n-1}.$$

Dan moet identiek

$$du_n - u_{n+1} du_1 - \ldots . - u_{2n-1} du_{n-1} = C_1 du_1 + \ldots . + C_{2n-1} du_{2n-1}$$

zijn, waaruit door vergelijking der coefficienten volgt

$$C_1 = -u_{n+1}, \ldots . C_{n-1} = -u_{2n-1}, \; C_n = 1, \; C_{n+1} = 0, \ldots . C_{2n-1} = 0.$$

Hierdoor verandert (11) in

$$dz - \Sigma p dx = N(du_n - u_{n+1} du_1 - \ldots . - u_{2n-1} du_{n-1}); \quad (12)$$

waaruit volgt, dat het eerste lid van (11) nul wordt door middel van

Digitized by Google

$u_n =$ standv., $u_1 =$ standv., ... $u_{n-1} =$ standv.;

zoodat deze vergelijkingen de volledige integraal van (1) opleveren; maar, daar de standvastigen $z_0, x_{1,0}, \ldots . x_{n-1,0}$ voorstellen, kunnen wij hiervoor schrijven

$$u_n = z_0, \quad u_1 = x_{1,0}, \ldots . u_{n-1} = x_{n-1,0}. \quad . \quad . \quad (13)$$

5. *Theorema.*

Wij hebben dus voor de integratie eener gedeeltelijke differentiaalvergelijking het volgende theorema.

Indien men het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen volledig integreert (opmerkende dat de gegeven vergelijking een der integralen is), en indien men vervolgens als standvastigen der integratie invoert de zoogenaamde aanvankelijke waarden

$x_{1,0}, \ldots . x_{n-1,0}, z_0, p_{1,0}, \ldots . p_{n-1,0}$ van $x_1, \ldots . x_{n-1}, z, p_1, \ldots . p_{n-1}$

d. w. z. de willekeurige waarden, die deze veranderlijken aannemen voor eene bepaalde waarde γ van x_n; dan vormen die integralen van het hulpstelsel, wier tweede leden $x_{1,0}, \ldots . x_{n-1,0}, z_0$ bevatten, een volledige integraal der gegeven differentiaalvergelijking.

6. *Kortere afleiding van het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen.*

Was ons doel alleen geweest de methode van CAUCHY uiteen te zetten, zonder op haar verband met andere methoden te letten; dan hadden wij langs korteren weg het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen (3) kunnen vinden. Wij hebben toch in VII. 9 de formulen gevonden ($\alpha = 1, \ldots . n$)

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_\alpha} = -\rho \frac{\partial x_\alpha}{\partial P_1}, \qquad \sum_\alpha p_\alpha \frac{\partial X_1}{\partial p_\alpha} = -\rho \frac{\partial z}{\partial P_1},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial X_1}{\partial z} = \rho \frac{\partial p_\alpha}{\partial P_1};$$

in het eerste lid wordt X_1 als functie van z en de x, p beschouwd;

Digitized by Google

in het tweede lid beschouwt men z en de x, p als functies van Z en de X, P; daar nu in de tweede leden dezer vergelijkingen alleen gedeeltelijke differentiaalquotienten naar P_1 voorkomen, kunnen wij de overige grootheden $Z, X_1, \ldots . X_n, P_2, \ldots . P_n$ als standvastig beschouwen; de vergelijkingen vormen dan een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen, die wij aldus kunnen schrijven

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_1}} = \ldots . = \frac{dx_n}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\Sigma p \frac{\partial X_1}{\partial p}} =$$

$$= \frac{-dp_1}{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}} = \ldots . = \frac{-dp_n}{\frac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_1}{\partial z}} = \frac{-dP_1}{\rho}; \quad (14)$$

welke vergelijkingen, indien wij het laatste lid, dat voor ons doel overbodig is, weglaten, volkomen met (3) overeenstemmen. De verdere redeneering is als boven.

Deze afleiding der methode van CAUCHY heeft het voordeel, dat zij de integratie van een gedeeltelijke differentiaalvergelijking onmiddellijk tot die van een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen terugbrengt, zonder gebruik te maken van de integratie der lineaire gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen; de integratie van deze is dus ook in de methode van CAUCHY begrepen. Zij toch

$$M = M_1 p_1 + \ldots . + M_n p_n$$

de gegeven lineaire vergelijking; deze voert tot het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_1}{M_1} = \ldots . = \frac{dx_n}{M_n} = \frac{dz}{M} = \ldots . ,$$

waarbij wij de overige vergelijkingen niet opschrijven; want de genoemde bevatten de p niet meer, en vormen dus een op zich zelf integreerbaar stelsel, uit welks integralen de p reeds geëlimineerd zijn.

7. *Opmerking.*

Heeft men eenmaal, volgens de methode van CAUCHY, de grootheden $u_1, \ldots . u_{2n-1}$ gevonden, zoodanig dat

Digitized by Google

$$dz - \Sigma p\,dx = N(du_n - u_{n+1}\,du_1 - \ldots - u_{2n-1}\,du_{n-1}), \quad (12)$$

m. a. w. heeft men een volledige integraal van (1) gevonden; dan is het gemakkelijk daaruit de overeenkomstige tangentiale transformatie af te leiden. In (12) komt a_1 voor in $p_n, u_1, \ldots u_{2n-1}$; deze vergelijking is identiek, wat ook a_1 is; vervangt men dus a_1 door X_1, dan blijft zij identiek en wordt

$$dz - \Sigma p dx = N(du_n^{\times} - u_{n+1}^{\times}\,du_1^{\times} - \ldots - u_{2n-1}^{\times}\,du_{n-1}^{\times} - P_1 dX_1) \quad (15)$$

(waarbij P_1 geschreven is voor

$$\frac{\partial u_n^{\times}}{\partial X_1} - u_{n+1}^{\times}\frac{\partial u_1^{\times}}{\partial X_1} - \ldots - u_{2n-1}^{\times}\frac{\partial u_{n-1}^{\times}}{\partial X_1};$$

terwijl de $^{\times}$ bij de u aanduiden, dat a_1 door X_1 moet vervangen worden).

De vergelijking (15) is de gezochte tangentiale transformatie.

Bijzonder geval:

In het bijzondere geval, dat z niet in X_1 voorkomt, en dat X_1 naar p_n opgelost wordt,

$$p_n - \Phi_n = 0,$$

vindt men zulk een tangentiale transtormatie nog langs anderen weg. De methode van CAUCHY levert

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_{n-1}\,dx_{n-1} - \Phi_n\,dx_n = \\ = du_n - u_{n+1}\,du_1 - \ldots - u_{2n-1}\,du_{n-1};$$

aan weerszijde $-(p_n - \Phi_n)\,dx_n$ optellende,

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = du_n - u_{n+1}\,du_1 - \ldots \\ - u_{2n-1}\,du_{n-1} - (p_n - \Phi_n)\,dx_n \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Dit is reeds een tangentiale transformatie (waarbij wij kunnen opmerken dat p_n alleen in $p_n - \Phi_n$ voorkomt); daaruit vindt men de transformatie in den gebruikelijken vorm

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = \\ = d\Big(u_n - x_n(p_n - \Phi_n)\Big) - u_{n+1}\,du_1 - \ldots - u_{2n-1}\,du_{n-1} + x_n d(p_n - \Phi_n).$$

Digitized by Google

TWAALFDE HOOFDSTUK.

Methode van Jacobi.

---

1. *Algemeene verklaring.*

Om de vergelijking

$$X_1 = a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

te integreeren, is het volgens X. 1 voldoende functies $Z, X_2, \ldots . X_n$ te vinden, die voldoen aan de volgende vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} [X_2, X_1] = 0, \\ [X_3, X_1] = 0, \ [X_3, X_2] = 0, \\ [X_4, X_1] = 0, \ [X_4, X_2] = 0, \ [X_4, X_3] = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ [X_n, X_1] = 0, \ [X_n, X_2] = 0, \ldots . [X_n, X_{n-1}] = 0, \\ [Z, X_1] = 0, \ [Z, X_2] = 0, \ldots . [Z, X_{n-1}] = 0, \ [Z, X_n] = 0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

De eerste vergelijking bepaalt X_2, de volgende rij X_3, enz.; totdat eindelijk de laatste rij vergelijkingen Z bepaalt. Al deze vergelijkingen zijn homogene lineaire gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen, die wij ook aldus kunnen schrijven.

$$[F, X_1] = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A_1)$$

$$[F, X_1] = 0, \ [F, X_2] = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A_2)$$

$$[F, X_1] = 0, \ [F, X_2] = 0, \ [F, X_3] = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A_3)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$[F, X_1] = 0, \ [F, X_2] = 0, \ldots . [F, X_{n-1}] = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A_{n-1})$$

$$[F, X_1] = 0, \ [F, X_2] = 0, \ldots . [F, X_{n-1}] = 0, \ [F, X_n] = 0. \quad (A_n)$$

Digitized by Google

Elk stelsel (A_i) verschilt van het voorgaande slechts door toevoeging van één vergelijking, $[F, X_i] = 0$.

Men begint met een oplossing $F = \Phi(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n)$ van (A_1) te zoeken, verschillend van de vooruit bekende oplossing $F = X_1$; dan neemt men Φ als X_2 aan; nu kan men het stelsel (A_2) opschrijven, daar X_2 gevonden is. Dan tracht men een oplossing $F = \psi$ te vinden, die aan beide vergelijkingen van dit stelsel voldoet, en die verschilt van de beide bekende oplossingen $F = X_1$, $F = X_2$; ψ neemt men als X_3 aan.

Vervolgens gaat men tot het stelsel (A_3) over; zoekt daarvan een oplossing $F = \chi$, verschillend van de drie bekende, $F = X_1$, $F = X_2$, $F = X_3$; χ neemt men als X_4 aan.

Op die wijze gaat men voort; eindelijk wordt Z door het stelsel (A_n) gevonden.

2. *Vergelijking zonder* z.

Eenvoudig is deze methode alleen, als (1) z niet expliciet bevat; dan toch is het voldoende (X. 2) functies $X_2, \ldots . X_n$ (zonder z) te vinden, die voldoen aan

$$\left.\begin{array}{l} (X_2, X_1) = 0, \\ (X_3, X_1) = 0,\ (X_3, X_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (X_n, X_1) = 0,\ (X_n, X_2) = 0, \ldots . (X_n, X_{n-1}) = 0, \end{array}\right\}; \qquad (3)$$

waartoe de integratie der volgende stelsels vereischt wordt

$$\begin{array}{ll} (F, X_1) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (B_1) \\ (F, X_1) = 0,\ (F, X_2) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots & (B_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (F, X_1) = 0,\ (F, X_2) = 0, \ldots . (F, X_{n-1}) = 0. \ldots & (B_{n-1}) \end{array}$$

3. *Integratie van* (B_1) *en* (B_2).

Men begint dus een van $F = X_1$ verschillende oplossing $F = \Phi(x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n)$ der vergelijking (B_1) te vinden, of, wat hetzelfde is (IX. 7), een integraal, $\Phi =$ standv., van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

Digitized by Google

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X_1}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial X_1}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial X_1}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial X_1}{\partial x_n}}; \quad (4)$$

φ neemt men voor X_2.

Nu overgaande tot het stelsel (B_2), dat van (B_1) slechts door toevoeging van de tweede vergelijking verschilt, zoekt men eerst een oplossing $F = \vartheta$ der eerste vergelijking, verschillende van $F = X_1$ en $F = X_2$; m. a. w. men zoekt een nieuwe oplossing van (B_1), dus een nieuwe integraal van (4). Nu onderzoekt men, of $F = \vartheta$ ook een oplossing is der tweede vergelijking (B_2); dus men gaat na, of $(\vartheta, X_2) = 0$ is. Zoo ja, dan is $F = \vartheta$ de gezochte oplossing van het geheele stelsel (B_2), en wij nemen ϑ als X_3 aan.

Wordt echter (ϑ, X_2) niet nul; maar weer een functie der x, p, die wij ϑ_1 noemen,

$$(\vartheta, X_2) = \vartheta_1;$$

dan heeft $F = \vartheta_1$ de eigenschap een nieuwe oplossing van (B_1), dus van de eerste vergelijking (B_2), te zijn, zooals wij aanstonds bewijzen zullen. Nu onderzoekt men, of $F = \vartheta_2$ aan de tweede vergelijking (B_2) voldoet; zoo ja, dan is ϑ_1 de gezochte X_3; zoo niet, laat dan $(\vartheta_1, X_2) = \vartheta_2$ zijn, en $F = \vartheta_2$ zal een nieuwe oplossing van (B_1) zijn. Enz.

4. *Theorema van* Poisson—Jacobi.

Nu moeten wij in de eerste plaats bewijzen, dat, als wij de volgende functies vormen

$$(\vartheta, X_2) = \vartheta_1, \quad (\vartheta_1, X_2) = \vartheta_2, \quad (\vartheta_2, X_2) = \vartheta_3, \ldots,$$

alle uitdrukkingen

$$F = \vartheta_1, \quad F = \vartheta_2, \quad F = \vartheta_3, \ldots$$

oplossingen van (B_1) zijn; dus dat

$$(\vartheta_1, X_1) = 0, \quad (\vartheta_2, X_1) = 0, \quad (\vartheta_3, X_1) = 0, \ldots,$$

Daar $(\vartheta, X_2) = \vartheta_1$ is, zal

Digitized by Google

$$(\vartheta_1, X_1) = \Big((\vartheta, X_2), X_1\Big) = -\Big(X_1, (\vartheta, X_2)\Big) =$$
$$= \Big(\vartheta, (X_2, X_1)\Big) + \Big(X_2, (X_1, \vartheta)\Big)$$

zijn, volgens VIII. 4; maar omdat $F = X_2$ en $F = \vartheta$ beide oplossingen van (B_1) zijn, is

$$(X_2, X_1) = 0,$$

en $$(X_1, \vartheta) = -(\vartheta, X_1) = 0;$$

dus zal $$(\vartheta_1, X_1) = 0$$

zijn. Evenzoo voor de overige ϑ.

Elke uitdrukking $F = f(X_1, X_2, \vartheta, \vartheta_1, \ldots.)$, waarbij f een willekeurige functie is, zal ook een oplossing van (B_1) zijn, omdat $f =$ standv. een integraal van (4) is, zie IX. 5 en 7.

5. *Bewijs, dat men een ϑ moet vinden, die een functie der voorgaande is.*

Bij het berekenen der functies ϑ, moet men, indien men niet tot een ϑ komt, die nul is (zoodat de voorgaande ϑ de gezochte X_3 is), tot een ϑ komen, die een functie der voorgaande is; (want het aantal onderling onafhankelijke oplossingen van (A_1) kan niet grooter dan $2n - 1$ zijn). Zoodra men zulk een ϑ gevonden heeft, kan men de bewerking, die verdere ϑ doet vinden, staken; omdat zij allen functies van de voorgaande ϑ en van X_1, X_2 zullen zijn. Zij toch

$$\vartheta_i = \Theta(X_1, X_2, \vartheta, \vartheta_1, \ldots. \vartheta_{i-1}),$$

dan is (zie VIII, 1)

$$\vartheta_{i+1} = (\vartheta_i, X_2) = (\Theta, X_2) = \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}(X_1, X_2) + \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}(X_2, X_2) +$$
$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta}(\vartheta, X_2) + \ldots. + \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta_{i-i}}(\vartheta_{i-1}, X_2) =$$
$$= \vartheta_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + \vartheta_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta_1} + \ldots. + \vartheta_i \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta_{i-1}},$$

blijkbaar een functie van $X_1, X_2, \vartheta, \vartheta_1, \ldots. \vartheta_{i-1}$, daar $\vartheta_i = \Theta$ dat is.

Digitized by Google

6. *Hoe men een oplossing der laatste vergelijking* (B_2) *vindt.*

Zij nu ϑ_{i-1} de laatste ϑ, die geen functie der voorgaande is, dan tracht men een zoodanige functie

$$f(X_1, X_2, \vartheta, \ldots . \vartheta_{i-1})$$

te bepalen, dat $F = f$ een oplossing van $(F, X_2) = 0$ is, dus dat

$$(f, X_2) = 0,$$

of

$$\vartheta_1 \frac{df}{d\vartheta} + \vartheta_2 \frac{df}{d\vartheta_1} + \ldots . + \vartheta_i \frac{df}{d\vartheta_{i-1}} = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

is; dit is een lineaire homogene gedeeltelijke differentiaalvergelijking in f met i onafhankelijke veranderlijken $\vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{i-1}$; wanneer men hiervan één oplossing $f = \varphi(\vartheta, \vartheta_1 \ldots . \vartheta_{i-1})$ kent, dan is φ de gezochte X_3.

7. *Integratie der verdere stelsels.*

X_3 gevonden zijnde, kan men tot de integratie van (B_3) overgaan. Het is duidelijk, hoe men daarbij te werk gaat. (B_3) verschilt van (B_2), doordat aan dit stelsel één vergelijking toegevoegd is. Wij gaan dus een nieuwe oplossing van (B_2) zoeken, verschillend van de reeds bekende, $F = X_1$, $F = X_2$, $F = X_3$. Deze oplossing $F = \vartheta$ gevonden zijnde, onderzoekt men, of zij ook een oplossing der laatste vergelijking van (B_3) is; zoo ja, dan neemt men ϑ als X_4 aan; zoo niet, dan vormt men de reeks

$$(\vartheta, X_3) = \vartheta_1, \quad (\vartheta_1, X_3) = \vartheta_2, \text{ enz.},$$

zoolang totdat men aan een ϑ komt, die nul is (de voorgaande ϑ is dan X_4), of tot een ϑ, die een functie der voorgaande is; dan gaat men verder als in § 7.

Zoo ook met de verdere stelsels.

Digitized by Google

8. *Opmerking.*

Het kan bij het in § 6 behandelde gebeuren, dat een der ϑ gelijk aan een van nul verschillende standvastige wordt, dus $\vartheta_i = m$; dan worden alle volgende ϑ nul; maar zoekt men nu een zoodanige functie $f(X_1, X_2, \vartheta, \vartheta_1, \ldots . \vartheta_{i-1})$, dat $F = f$ een oplossing van $(F, X_2) = 0$ is, dus dat

$$\vartheta_1 \frac{df}{d\vartheta} + \vartheta_2 \frac{df}{d\vartheta_1} + \ldots . + m \frac{df}{d\vartheta_{i-1}} = 0$$

is; dan wordt de integratie van deze vergelijking verkregen door die van het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta_1} = \ldots . = \frac{d\vartheta_{i-2}}{\vartheta_{i-1}} = \frac{d\vartheta_{i-1}}{m},$$

waarvan de laatste vergelijking integreerbaar is; deze integraal levert de ééne oplossing der lineaire differentiaalvergelijking in f, die men noodig heeft.

Alleen voor $i = 2$ zou men tot een andere oplossing van het vorige stelsel (B_1) moeten overgaan.

9. *Ongunstigste geval der methode van* Jacobi.

Om een oplossing der laatste vergelijking (B_2) te vinden, moet men volgens § 6 een oplossing zoeken van een lineaire vergelijking (5) met i onafhankelijke veranderlijken, of een integraal van een hulpstelsel van $i - 1$ gewone differentiaalvergelijkingen.

De grootste waarde, die i verkrijgen kan, is $2n - 3$; omdat het aantal onafhankelijke oplossingen van (B_1), of integralen van (4), niet meer dan $2n - 1$ kan zijn, waaronder twee van voren af aan bekende. Dit geval, zoo ongunstig mogelijk voor de toepassing der methode van Jacobi, is echter het meest gewenschte; omdat men dan alle integralen

Digitized by Google

van (4) kent en dus, door toepassing der methode van CAUCHY, onmiddellijk de volledige integraal van (1) vindt.

Hetzelfde kan men opmerken bij de integratie der volgende stelsels (B_3), enz. Telkens als het ongunstigste geval voor de methode van JACOBI intreedt, voert die van CAUCHY onmiddellijk tot het doel.

Digitized by Google

DERTIENDE HOOFDSTUK.

Gelijktijdige stelsels.

---

1. *Volledig stelsel.*

Wij hebben in X, 4 gezien, dat de integratie van een stelsel gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen

$$X_1 = a_1, \ldots . X_m = a_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

alleen mogelijk is, als aan de volgende voorwaarden voldaan wordt

$$[X_i, X_k] = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots . m). \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wij zullen bewijzen, dat deze voorwaarden voldoende zijn voor de integreerbaarheid van het stelsel, als er identiek aan voldaan wordt. Zulk een stelsel heet volledig.

Werd aan de voorwaarden (2) niet identiek, maar door middel van (1) voldaan (hetgeen alleen mogelijk is, als men de a als rekenkundige, niet als willekeurige, standvastigen beschouwt), dan zijn deze voorwaarden in 't algemeen niet voldoende.

2. *Volledig homogeen lineair stelsel.*

Voor wij tot het algemeen bewijs overgaan, moeten wij eerst aantoonen, dat een volledig homogeen lineair stelsel een volledige oplossing heeft. Zij dit stelsel

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\,q_1 + \ldots + a_{1n}\,q_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{r1}\,q_1 + \ldots + a_{rn}\,q_n &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

of, als wij slechts volledige oplossingen in één vergelijking beschouwen, en dus de q als gedeeltelijke differentiaalquotienten $\frac{df}{dy}$ opvatten,

$$\left.\begin{aligned} A_1 f \equiv a_{11}\frac{df}{dy_1} + \ldots + a_{1n}\frac{df}{dy_n} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_r f \equiv a_{r1}\frac{df}{dy_1} + \ldots + a_{rn}\frac{df}{dy_n} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3')$$

(waarbij de a functies van de y zijn). Deze vergelijkingen voldoen nu identiek aan de voorwaarden (2), die hier volgens VIII, 3 den vorm aannemen

$$A_i A_k - A_k A_i = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De laatste vergelijking (3') heeft een volledige oplossing (IX, 7)

$$b - f - \mu_1 u_1 - \ldots - \mu_{n-1} u_{n-1} = 0;$$

de u (functies van de y) kent men, zoodra men $n-1$ onafhankelijke oplossingen van (3') weet,

$$f = u_1, \ldots f = u_{n-1}.$$

Wij nemen $u_1, \ldots u_{n-1}$, te zamen met y_n, als nieuwe veranderlijken aan, in plaats van $y_1, \ldots y_n$, (waarbij wij de geoorloofde onderstelling maken, dat y_n niet zelf een der u is; omdat er ten minste één onder de vergelijkingen (3') moet zijn, waarvan $f = y_n$ geen oplossing is; daar anders in al die vergelijkingen de laatste term zou ontbreken).

Nu door een tangentiale transformatie (III, 5) de nieuwe veranderlijken invoerende, wordt (3')

$$\left.\begin{aligned} B_1 f \equiv b_{11}\frac{df}{du_1} + \ldots + b_{1,n-1}\frac{df}{du_{n-1}} + b_{1,n}\frac{df}{dy_n} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ B_{r-1} f \equiv b_{r-1,1}\frac{df}{du_1} + \ldots + b_{r-1,n-1}\frac{df}{du_{n-1}} + b_{r-1,n}\frac{df}{dy_n} &= 0, \\ B_r f \equiv b_{r1}\frac{df}{du_1} + \ldots + b_{r,n-1}\frac{df}{du_{n-1}} + b_{r,n}\frac{df}{dy_n} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Digitized by Google

waarbij

$$b_{i,k} = a_{i,1}\frac{du_k}{dy_1} + a_{i2}\frac{du_k}{dy_2} + \ldots + a_{i,n}\frac{du_k}{dy_n} = A_i u_k,$$
$$b_{i,n} = a_{i,1}\frac{dy_n}{dy_1} + \ldots + a_{i,n-1}\frac{dy_n}{dy_1} + a_{i,n} = A_i y_n.$$
$$\left(\begin{matrix} k=1,\ldots n-1 \\ i=1,\ldots r \end{matrix}\right)$$

Hieruit blijkt, dat alle termen der laatste vergelijking (5) nul zijn, behalve de laatste; want

$$b_{r,1} = A_r u_1, \ldots . b_{r,n-1} = A_r u_{n-1},$$

welke alle 0 zijn, omdat $f = u_1, \ldots . f = u_{n-1}$ oplossingen zijn van de laatste vergelijking (3'); eindelijk wordt

$$b_{r,n} = A_r y_n = a_{r,n}.$$

Volgens VIII, 2 voldoen de vergelijkingen (5) identiek aan de voorwaarden, waarin de vergelijkingen (4) overgaan, als men er de nieuwe veranderlijken in invoert, dus aan

$$B_k' B_k - B_i B_i = 0. \ldots \ldots \quad (6)$$

Passen wij (6) toe op de laatste vergelijking (5) en een der overige, na opgemerkt te hebben, dat (6) den vorm kan aannemen (VIII, 3)

$$(B_i b_{k,1} - B_k b_{i,1})\frac{df}{du_1} + \ldots . + (B_i b_{k,n-1} - B_k b_{i,n-1})\frac{df}{du_{n-1}} +$$
$$+ (B_i b_{k,n} - B_k b_{i,n})\frac{df}{dy_n} = 0;$$

dan komt er, r voor k nemende,

$$-a_{r,n}\frac{db_{i,1}}{dy_n}\frac{df}{du_1} - \ldots . - a_{r,n}\frac{db_{i,n-1}}{dy_n}\frac{df}{du_{n-1}} +$$
$$+ \left(B_i a_{r,n} - a_{r,n}\frac{db_{i,n}}{dy_n}\right)\frac{df}{dy_n} = 0.$$

Hieraan moet identiek voldaan worden; dus moeten alle coëfficienten der differentiaalquotienten van f nul zijn; dit geeft (daar $a_{r,n}$ niet nul is)

$$\frac{db_{i,1}}{dy_n} = 0, \ldots . \frac{db_{i,n-1}}{dy_n} = 0; \ldots . \quad (6')$$

waaruit blijkt, dat alle coëfficienten in de vergelijking $B_i f$

Digitized by Google

vrij van y_n zijn, (voor alle waarden van i van 1 tot $r-1$), behalve de laatste $b_{i,n}$.

Het stelsel (5) wordt dus

$$\left.\begin{aligned} B_1 f \equiv b_{1,1}\frac{df}{du_1} + \ldots + b_{1,n-1}\frac{df}{du_{n-1}} + b_{1,n}\frac{df}{dy_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{r-1} f \equiv b_{r-1,1}\frac{df}{du_1} + \ldots + b_{r-1,n-1}\frac{df}{du_{n-1}} + b_{r-1,n}\frac{df}{dy_n} = 0, \\ B_r f \equiv a_{r,n}\frac{df}{dy_n} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{df}{dy_n} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

waarbij y_n alleen nog voorkomt in $b_{1,n}, \ldots . b_{r-1,n}$.

Elimineeren wij nu, door middel der laatste vergelijking, $\frac{df}{dy_n}$ uit de voorgaande; dan komt er

$$\left.\begin{aligned} C_1 f \equiv b_{1,1}\frac{df}{du_1} + \ldots + b_{1,n-1}\frac{df}{du_{n-1}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{r-1} f \equiv b_{r-1,1}\frac{df}{du_1} + \ldots + b_{r-1,n-1}\frac{df}{du_{n-1}} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

in welk stelsel y_n niet meer voorkomt.

Van dit stelsel zullen wij bewijzen, dat het nog volledig is, en dus identiek voldoet aan

$$C_i C_k - C_k C_i = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

dus dat identiek

$$(C_i b_{k1} - C_k b_{i1})\frac{df}{du_1} + \ldots + (C_i b_{k,n-1} - C_k b_{i,n-1})\frac{df}{du_1} = 0$$

is, m. a. w. dat alle coefficienten nul zijn, dus dat

$$C_i b_{k,l} - C_k b_{i,l} = 0. \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, \ldots . r-1 \\ l = 1, \ldots . n-1 \end{pmatrix}.$$

Dit bewijst men aldus. Daar

$$B_i = C_i + b_{i,n}\frac{d}{dy_n}$$

is, volgt uit

Digitized by Google

$$B_i b_{k,l} - B_k b_{i,l} = 0$$

$$C_i b_{k,l} - C_k b_{i,l} + b_{i,n} \frac{d b_{k,l}}{d y_n} - b_{k,n} \frac{d b_{i,l}}{d y_n} = 0 ;$$

maar volgens (6′) is

$$\frac{d b_{k,l}}{d y_n} = 0, \qquad \frac{d b_{i,l}}{d y_n} = 0 ;$$

dus

$$C_i b_{k,l} - C_k b_{i,l} = 0.$$

Zoodra men van (7) een volledige oplossing, dus met $n - r + 1$ standvastigen, gevonden heeft, waarin y_n niet voorkomt, is dit ook een oplossing van het stelsel (5′), dat stelkundig gelijkwaardig is met (7), wanneer men aan laatstgenoemd stelsel nog $\frac{d f}{d y_n} = 0$ toevoegt, waaraan de gevonden volledige oplossing (zonder y_n) ook voldoet. Dan zal de gevonden oplossing, na de u door de y vervangen te hebben, ook een oplossing zijn van het stelsel (3′), dat door een tangentiale transformatie uit (5) afgeleid wordt; daar in deze oplossing $n - r + 1$ standvastigen voorkomen, is het een volledige oplossing van het stelsel (3′), dat uit r vergelijkingen bestaat en waarin n onafhankelijke veranderlijken voorkomen.

Hierdoor is dus de vraag, een volledige oplossing te vinden van een stelsel van r vergelijkingen met n onafhankelijke veranderlijken, teruggebracht tot dezelfde vraag voor een stelsel van $r - 1$ vergelijkingen met $n - 1$ veranderlijken; deze wordt eveneens teruggebracht tot die voor een stelsel van $r - 2$ vergelijkingen met $n - 2$ veranderlijken, en zoo voortgaande tot het vinden der volledige oplossing van één vergelijking met $n - r + 1$ onafhankelijke veranderlijken; deze heeft een volledige oplossing; dus heeft ook elk volledig homogeen lineair stelsel een volledige oplossing.

3. *Stelsels van* Clebsch.

Een homogeen lineair stelsel (3′), waarbij niet identiek aan de voorwaarden (4) voldaan wordt, maar waarbij de

Digitized by Google

eerste leden van (4) lineaire functies der eerste leden van (3′) zijn, en dus door middel van (3′) nul worden, heet een stelsel van CLEBSCH; wij zullen bewijzen, dat het een volledige oplossing heeft.

Indien men de vergelijkingen (3′) vervangt door r andere onderling onafhankelijke vergelijkingen van den vorm

$$B_1 f \equiv \lambda_{1,1} A_1 + \ldots + \lambda_{1,n} A_r = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_r f \equiv \lambda_{r,1} A_1 + \ldots + \lambda_{r,n} A_r = 0,$$

waarbij de λ functies van de y voorstellen, zullen ook de uitdrukkingen $B_i B_k - B_k B_i$ lineaire functies der A zijn (zooals bij uitwerking onmiddellijk blijkt), dus ook van de B.

Denkt men zich nu in 't bijzonder uit (3′) een stelsel van r vergelijkingen afgeleid, die volgens r der differentiaalquotienten opgelost zijn,

$$\left.\begin{aligned} C_1 f \equiv \frac{df}{dy_1} - c_{1,r+1}\frac{df}{dy_{r+1}} - \ldots - c_{1,n}\frac{df}{dy_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_r f \equiv \frac{df}{dy_r} - c_{r,r+1}\frac{df}{dy_{r+1}} - \ldots - c_{r,n}\frac{df}{dy_n} = 0; \end{aligned}\right\} (9)$$

dan geldt voor de C hetgeen boven van de B gezegd is (want de C zijn lineaire functies der A), zoodat alle uitdrukkingen $C_i C_k - C_k C_i$ lineaire functies der A, dus der C, zijn

$$C_i C_k - C_k C_i = \mu_1 C_1 + \ldots + \mu_r C_r;$$

maar in het eerste lid komt geen der differentiaalquotienten $\frac{df}{dy_1}, \ldots \frac{df}{dy_r}$ meer voor; deze mogen dan ook in het tweede lid niet voorkomen; dus moeten alle μ nul zijn, zoodat

$$C_i C_k - C_k C_i = 0$$

wordt en wel identiek; daaruit blijkt dat (9) een volledig stelsel is, dus een volledige oplossing heeft; dus heeft ook het stelsel (3′), dat slechts stelkundig van (9) verschilt, een volledige oplossing.

Digitized by Google

4. *Stelsels van* JACOBI.

Nu kunnen wij bewijzen, dat de homogene lineaire stelsels, waartoe de methode van JACOBI voert, volledige stelsels zijn.

Het eerste stelsel wordt (XII, 2)

$$(F, X_1) = 0, \qquad (F, X_2) = 0;$$

terwijl

$$(X_1, X_2) = 0.$$

Hiervoor schrijven wij

$$A F \equiv (F, X_1) = \sum_i \left(\frac{\partial X_1}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} - \frac{\partial X_1}{\partial x_i} \frac{dF}{dp_i} \right) = 0,$$

$$B F \equiv (F, X_2) = \sum_i \left(\frac{\partial X_2}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} - \frac{\partial X_2}{\partial x_i} \frac{dF}{dp_i} \right) = 0.$$

Dit zal een volledig stelsel zijn. Want

$$AB - BA = (B, X_1) - (A, X_2) = \Big((F, X_2), X_1\Big) - \Big((F, X_1), X_2\Big).$$

Maar volgens VIII, 4 is

$$\Big(X_1 (X_2, F)\Big) + \Big(X_2, (F, X_1)\Big) + \Big(F, (X_2, X_1)\Big) = 0,$$

of

$$\Big((F, X_2), X_1\Big) - \Big((F, X_1), X_2\Big) = \Big(F, (X_1, X_2)\Big) = 0,$$

omdat $(X_1, X_2) = 0$ is; dus

$$AB - BA = 0.$$

Evenzoo bewijst men het voor de volgende stelsels.

5. *Stelsels van* JACOBI. *Algemeen geval.*

Ook de lineaire homogene stelsels, waartoe de methode van JACOBI in het algemeen geval voert (XII, 1), zijn integreerbaar; het zijn echter geen volledige stelsels, maar stelsels van CLEBSCH.

Het eerste stelsel wordt

$$[F, X_1] = 0, \qquad [F, X_2] = 0,$$

waarbij

$$[X_1, X_2] = 0.$$

Digitized by Google

Schrijven wij nu

$$A\,F \equiv [F, X_1] =$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial p_i}\left(\frac{dF}{dx_i} + p_i \frac{dF}{dz}\right) - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)\frac{dF}{dp_i} \right\} = 0,$$

$$B\,F \equiv [F, X_2] =$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{\partial X_2}{\partial p_i}\left(\frac{dF}{dx_i} + p_i \frac{dF}{dz}\right) - \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial X_2}{\partial z}\right)\frac{dF}{dp_i} \right\} = 0;$$

dan zal

$$AB - BA = [B, X_1] - [A, X_2] = \Big[[F, X_2], X_1\Big] - \Big[[F, X_1], X_2\Big]$$

zijn; maar volgens VIII, 5 is

$$\Big[X_1, [F, X_2]\Big] + \Big[F, [X_2, X_1]\Big] + \Big[X_2, [X_1, F]\Big] =$$

$$= -\frac{\partial X_1}{\partial z}[F, X_2] - \frac{\partial F}{\partial z}[X_2, X_1] - \frac{\partial X_2}{\partial z}[X_1, F],$$

waaruit, omdat $[X_1, X_2] = 0$ is,

$$\Big[[F, X_2]\, X_1\Big] - \Big[[F, X_1], X_2\Big] = \frac{\partial X_1}{\partial z}[F, X_2] - \frac{\partial X_2}{\partial z}[F, X_1];$$

zoodat

$$A\,B - B\,A = -\frac{\partial X_2}{\partial z} A\,F + \frac{\partial X_1}{\partial z} B\,F$$

wordt, dus een lineaire functie van $A\,F$ en $B\,F$. Hiermede is bewezen, dat het eerste stelsel een stelsel van CLEBSCH is, en dus integreerbaar. Eveneens voor de volgende stelsels.

6. *Elk volledig stelsel heeft een volledige integraal.*

Uit het voorgaande blijkt, dat de stelsels, waartoe de methode van JACOBI voert, integreerbaar zijn; dus dat men bij eenige gegeven functies $X_1, \ldots . X_m$, mits voldoende aan de voorwaarden

$$[X_i, X_k] = 0, \qquad (i, k = 1, \ldots . m)$$

Digitized by Google

andere functies $X_{m+1}, \ldots . X_n, Z$ kan vinden, zoodanig dat voldaan wordt aan

$$[X_i, X_l] = 0, \qquad [X_i, Z] = 0, \qquad (i, l = 1, \ldots . n)$$

m. a. w. dat een volledig stelsel een volledige integraal heeft.

In 't bijzonder heeft ook elke gedeeltelijke differentiaalvergelijking een volledige integraal; dit laatste volgt ook uit de methode van CAUCHY.

Digitized by Google

VEERTIENDE HOOFDSTUK.

Methode van Jacobi voor gelijktijdige stelsels.

---

1. *Methode van* Jacobi *voor een stelsel.*

Uit het voorgaande blijkt, hoe men de methode van Jacobi evenzeer op een volledig stelsel kan toepassen, als op een enkele vergelijking, en zelfs nog gemakkelijker; daar men bij een stelsel van k vergelijkingen,

$$X_1 = a_1, \ldots . X_k = a_k, \ldots . \quad (1)$$

nog slechts $n - k + 1$ functies $X_{k+1}, \ldots . X_n, Z$ behoeft te vinden, en men dus hier onmiddellijk zoover gevorderd is, als na de integratie van het $(k-1)^{\text{de}}$ lineaire stelsel, als er één vergelijking $X_1 = a_1$ gegeven is.

Tevens blijkt, hoe men de methode van Jacobi ook aldus kan voorstellen.

Bij de k vergelijkingen van een volledig stelsel zoeke men een andere vergelijking, zoodanig dat, als men ze toevoegt aan het gegeven stelsel, er een nieuw volledig stelsel, nu van $k+1$ vergelijkingen, ontstaat. Evenzoo verandert men het gevonden stelsel van $k+1$ vergelijkingen in een nieuw volledig stelsel van $k+2$ vergelijkingen, enz., totdat men een stelsel van $n+1$ vergelijkingen gevonden heeft, waarvan de eerste k vergelijkingen het gegeven stelsel, de laatste $n+1-k$ de volledige integraal vormen.

Digitized by Google

2. *Herleiding van een niet-volledig stelsel tot een normaalvorm.*

Is een gegeven stelsel niet volledig, dan moet men onderzoeken, of het al dan niet integreerbaar is. Wij bepalen ons hierbij tot het belangrijkste geval, waarbij z niet expliciet in de vergelijkingen voorkomt.

Zij gegeven het stelsel (1); dan kunnen wij twee gevallen onderscheiden.

1°. Het is mogelijk k der p uit (1) op te lossen; in dit geval herleidt men (1) tot een stelsel van den volgenden vorm

$$p_1 - \varphi_1 = 0, \ldots . p_k - \varphi_k = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarbij de φ functies van $p_{k+1}, \ldots . p_n, x_1, \ldots . x_n$ zijn.

2°. Het is niet mogelijk uit (1) k der p op te lossen (omdat er eenige vergelijkingen zonder p uit af te leiden zijn); in dat geval is het, indien het stelsel integreerbaar is, mogelijk (zie het bewijs in § 3) er eenige p en x met verschillende aanwijzers uit op te lossen; zoodat men een stelsel vergelijkingen verkrijgt van den vorm

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \psi_1 = 0, \ldots . x_q - \psi_q = 0, \\ p_{q+1} - \varphi_{q+1} = 0, \ldots . p_k - \varphi_k = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin de ψ functies van $x_{q+1}, \ldots . x_n$, en de φ functies van $x_{q+1}, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_q, p_{k+1}, \ldots . p_n$ zijn.

Daar het stelsel (1) stelkundig gelijkwaardig is met (2), of met (3), zal, indien (2) of (3) integreerbaar is, (1) het ook zijn, en omgekeerd; zoodat wij ons, bij het verder onderzoek van de integreerbaarheid, tot stelsels van den vorm (2) of (3) kunnen bepalen; of zelfs van den vorm (3), daar (2) hierin als bijzonder geval begrepen is.

3. *Bewijs, dat men uit* (1) *een stelsel van den vorm* (3) *kan afleiden.*

Onderstel, dat uit (1) q vergelijkingen tusschen de x alleen af te leiden zijn, en dat men uit de $k - q$ overige de groot-

Digitized by Google

heden $p_{q+1}, \ldots . p_k$ opgelost heeft; indien het dan niet mogelijk is, de eerstgenoemde vergelijkingen volgens x met andere aanwijzers op te lossen, moet dit hieraan liggen, dat er onder deze vergelijkingen minstens één voorkomt, waarin geen andere grootheden voorkomen dan $x_{q+1}, \ldots . x_k$; zij deze vergelijking

$$x_{q+1} - \chi (x_{q+2}, \ldots . x_k) = 0.$$

Daar ook

$$p_{q+1} - \Phi (x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_q, p_k, \ldots . p_n)$$

een der vergelijkingen is, blijkt, dat het aldus afgeleide stelsel niet integreerbaar kan zijn, omdat

$$(x_{q+1} - \chi, p_{q+1} - \Phi) = 1$$

wordt, en dus niet nul kan zijn, zooals voor de integreerbaarheid gevorderd wordt.

Dan kan ook (1) niet integreerbaar zijn. Dus omgekeerd, als (1) integreerbaar zal kunnen zijn, dan moet men uit (1) een stelsel van den vorm (3) kunnen afleiden.

4. *Onderzoek of een gegeven stelsel integreerbaar is.*

Wij gaan nu verder met het onderzoek van het stelsel (3).

Wij vormen alle uitdrukkingen

$$(x_i - \psi_i, p_r - \Phi_k), \quad (p_l - \Phi_l, p_r - \Phi_r). \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots . q \\ l, r = q+1, \ldots . k \end{pmatrix} \quad (4)$$

(het is niet noodig $(x_i - \psi_i, x_j - \Phi_j)$ te vormen; daar deze allen nul zijn). Nu kunnen zich de volgende gevallen voordoen.

1°. Al deze uitdrukkingen zijn nul; dan moeten zij het identiek zijn; want zij kunnen het niet door middel van (3) zijn, daar in (4) geen der grootheden $x_1, \ldots . x_q, p_{q+1}, \ldots . p_k$ meer voorkomt. Dan is (4) een volledig stelsel, en heeft dus een volledige integraal.

2°. Een of meer der uitdrukkingen (4) worden gelijk aan van nul verschillende standvastigen; integratie is onmogelijk, omdat hiervoor noodig is, dat elke uitdrukking (4) nul wordt.

Digitized by Google

3°. Een of meer der uitdrukkingen (4) worden gelijk aan functies van de p, x; integratie is alleen mogelijk, als deze functies gelijk nul worden; men stelt dus die functies, voor zoover ze onderling onafhankelijk zijn, gelijk nul, voegt deze nieuwe vergelijkingen aan het stelsel (3) toe, en behandelt het komende stelsel op dezelfde wijze als (1).

Ten slotte moet dus, òf de onmogelijkheid der integratie van (1) blijken, òf (1) moet zich laten herleiden tot een stelsel van den vorm

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \psi_1 = 0, \ldots . x_i - \psi_i = 0, \\ p_{i+1} - \varphi_{i+1} = 0, \ldots . p_m - \varphi_m = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waarbij de ψ functies van $x_{i+1}, \ldots . x_n$, de φ functies van $x_{i+1}, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_i, p_{m+1}, \ldots . p_n$ zijn, en waarbij identiek aan alle vergelijkingen

$$(x_r - \psi_r, p_s - \varphi_s) = 0, \quad (p_t - \varphi_t, p_s - \varphi_s) = 0 \quad \begin{pmatrix} r = 1, \ldots . i \\ s,t = i+1, \ldots . m \end{pmatrix}$$

voldaan wordt; welk stelsel dus een volledig stelsel is. Een volledig stelsel van den vorm (5) heet algemeen involutiestelsel; komen er geen vergelijkingen zonder de p in voor, dan heet het bijzonder involutiestelsel.

5. *Integratie van een bijzonder involutiestelsel.*

Om een bijzonder involutiestelsel te integreeren (de φ functies van $x_1, \ldots . x_n, p_{m+1}, \ldots . p_n$ zijnde)

$$p_1 - \varphi_1 = 0, \ldots . p_m - \varphi_m = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

moet men volgens Jacobi beginnen een functie H te zoeken, die voldoet aan

$$(p_1 - \varphi_1, H) = 0, \ldots . (p_m - \varphi_m, H) = 0. \quad . \quad . \quad (7)$$

In de eerste plaats is het dus noodig eene oplossing van de eerste vergelijking van dit stelsel te vinden (of, wat op hetzelfde neerkomt, een integraal van het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen). Merkt men nu op, dat in deze eerste vergelijking $p_2, \ldots . p_m$ volstrekt niet voorkomen, en dat tevens de differentiaalquotienten van H naar $x_2, \ldots . x_m$

Digitized by Google

ontbreken; dan mag men deze grootheden als standvastigen behandelen, volgens V, 5; hetzelfde is het geval met p_1, volgens V, 6; daar deze niet expliciet, maar alleen als $\frac{dH}{dp_1}$ voorkomt. Men heeft dus slechts een oplossing van een lineaire vergelijking met $2n - 2m + 1$ onafhankelijke veranderlijken te zoeken, of een integraal van een hulpstelsel van $2n - 2m$ gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_{m+1}}{-\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{m+1}}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_n}} = \frac{dp_{m+1}}{\frac{\partial \Phi_1}{dx_{m+1}}} = \ldots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}}.$$

Herleidt men een gegeven stelsel niet eerst tot een involutiestelsel, dan moet men beginnen met een oplossing te zoeken van een lineaire vergelijking met $2n$ onafhankelijke veranderlijken.

Heeft men een oplossing van het lineaire stelsel (7) gevonden, dan is volgens § 1 de integratie van (6) teruggebracht tot die van het nieuwe volledige stelsel

$$p_1 - \Phi_1 = 0, \ldots . p_m - \Phi_m = 0, H_{m+1} = a_{m+1},$$

dat één vergelijking meer bevat. Bij de integratie van dit stelsel kan men weer een vereenvoudiging verkrijgen, door het eerst te herleiden tot een nieuw bijzonder involutiestelsel; vervolgens moet men een oplossing zoeken eener lineaire vergelijking met $2n-2m-1$ onafhankelijke veranderlijken. Enz.

Op dezelfde wijze gaat men verder, steeds elk nieuw stelsel tot een involutiestelsel herleidende. Wij hebben hier het geval buiten beschouwing gelaten, dat op die manier een algemeen involutiestelsel ontstaat, hetgeen, zooals wij in het volgende hoofdstuk zien zullen, tot nieuwe vereenvoudiging aanleiding geeft.

Digitized by Google

VIJFTIENDE HOOFDSTUK.

Methode van Lie.

---

1. *Herleiding van een algemeen tot een bijzonder involutiestelsel.*

Zij gegeven het algemeen involutiestelsel

$$x_1 - \psi_1 = 0, \ldots\ldots x_l - \psi_l = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1a)$$

$$p_{l+1} - \Phi_{l+1} = 0, \ldots\ldots p_m - \Phi_m = 0, \quad (l < m). \quad (1b)$$

waarbij de ψ functies zijn van $x_{l+1}, \ldots\ldots x_n$, de Φ functies van $x_{l+1}, \ldots\ldots x_n, p_1, \ldots\ldots p_l, p_{m+1}, \ldots\ldots p_n$, terwijl voldaan wordt aan

$$(x_r - \psi_r, p_t - \Phi_t) = 0, \ (p_s - \Phi_s, p_t - \Phi_t) = 0. \ \begin{pmatrix} r = 1, \ldots\ldots l \\ s, t = l+1, \ldots\ldots m \end{pmatrix} \quad (2)$$

Wij voeren in plaats van $x_1, \ldots\ldots x_l$, nieuwe veranderlijken $x'_1, \ldots\ldots x'_l$ in, waarvoor wij de eerste leden der vergelijkingen (1a) kiezen,

$$x_1 - \psi_1 = x'_1, \ldots\ldots x_l - \psi_l = x'_l; \quad \ldots \quad (3)$$

terwijl $x_{l+1}, \ldots\ldots x_n$ onveranderd blijven; bij deze tangentiale transformatie worden (III, 6)

$$\left.\begin{aligned} p_{l+1} &= p'_{l+1} + p'_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{l+1}} + \ldots\ldots + p'_l \frac{\partial \psi_l}{\partial x_{l+1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= p'_n + p'_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \ldots\ldots + p'_l \frac{\partial \psi_l}{\partial x_n}; \end{aligned}\right\} \ldots \quad (4)$$

Digitized by Google

terwijl $p_1, \ldots . p_l$ onveranderd blijven; hoewel wij voor de symmetrie $p'_1, \ldots . p'_l$ schrijven, evenals $x'_{l+1}, \ldots . x'_n$ voor $x_{l+1}, \ldots . x_n$.

Hierdoor gaat (1) over in

$$x'_1 = 0, \ldots . x'_l = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

$$p'_{l+1} - \chi_{l+1} = 0, \ldots . p'_m - \chi_m = 0, \quad . \quad . \quad (5b)$$

waarbij de χ functies zijn van $x'_{l+1}, \ldots . x'_n$, $p'_1, \ldots . p'_l$, $p'_{m+1}, \ldots . p'_n$. Dit stelsel is nog volledig (VIII, 2), dus zal o. a.

$$(x'_1, p'_s - \chi_s) = 0$$

zijn, of wat hetzelfde is

$$\frac{\partial \chi_s}{\partial p'_1} = 0;$$

dus komt p'_1 in geen der χ meer voor, evenmin $p'_2, \ldots . p'_l$; zoodat de vergelijkingen (5*b*) vrij van $p'_1, \ldots . p'_l$ zijn, evenals zij vrij van $x'_1, \ldots . x'_l$ zijn; zij vormen dus op zich zelf een bijzonder involutiestelsel tusschen $x'_{l+1}, \ldots . x'_n, p'_{l+1}, \ldots . p'_n$.

Wij hebben in (5) dus een geval van scheiding der veranderlijken; wij kunnen (5*b*) afzonderlijk integreeren, en volgens V, 6 is een volledige integraal van (5*b*), mits er geen $x'_1, \ldots . x'_l$ onder de standvastigen in voorkomt, tevens een volledige integraal van het geheele stelsel (5), en dus, nadat men de substitutie (3) en (4) omgekeerd toegepast heeft, van het gegeven stelsel (1).

Hierdoor is de integratie van een algemeen involutiestelsel (1) teruggebracht tot die van een bijzonder involutiestelsel (5*b*), met zooveel minder onafhankelijke veranderlijken, als het eerste stelsel vergelijkingen zonder de p oplevert.

2. *Herleiding van een bijzonder involutiestelsel.*

Zij gegeven het bijzonder involutiestelsel

$$p_1 - \varphi_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

$$p_2 - \varphi_2 = 0, \ldots . p_m - \varphi_m = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

Men zoekt eerst een volledige integraal van (7*a*). Deze volledige integraal levert tevens een tangentiale transformatie,

Digitized by Google

die wij kiezen in den vorm (16) van hoofdstuk XI; dan is zij

$$dz - p_1 dx_1 - .... - p_n dx_n = dz_0 - (p_1 - \varphi_1) dx_1 - p_{2,0} dx_{2,0} - .... - p_{n,0} dx_{n,0}. \quad (8)$$

Hierin zijn $z_0, x_{2,0}, \ldots . x_{n,0}, p_{2,0}, \ldots . p_{n,0}$, te zamen met x_1 en $p_1 - \varphi_1$, die wij $p_{2,0}$ zullen noemen, de nieuwe veranderlijken, functies van z en de x, p. Hierbij verschillen echter $x_{2,0}, \ldots . x_{m,0}$ niet van $x_2, \ldots . x_m$, daar in (7*a*) $z, p_2, \ldots . p_m$ niet voorkomen (V, 6); om dezelfde reden zijn $z_0, p_{2,0}, \ldots . p_{m,0}$ van den vorm

$$z_0 = z + f, \quad p_{2,0} = p_2 + f_2, \ldots . p_{m,0} = p_m + f_m,$$

waarbij de f functies zijn van $x_1, \ldots . x_n, p_{m+1}, \ldots . p_n$, waarin $z, p_1, \ldots . p_m$ niet meer voorkomen, evenmin als in

$$p_{m+1,0}, \ldots . p_{n,0}, x_{m+1,0}, \ldots . x_{n,0}.$$

Door deze substitutie wordt (7)

$$p_{1,0} = 0, \ldots . \quad (9a)$$

$$p_{2,0} - \chi_2 = 0, \ldots . p_{m,0} - \chi_m = 0; \ldots . \quad (9b)$$

hetgeen weer een volledig stelsel is, omdat de transformatie tangentiaal was (VIII, 2); en een involutiestelsel, volgens bovengenoemde eigenschappen der grootheden $p_{2,0}, \ldots . p_{m,0}$.

Belangrijk is, dat x_1 in geen der vergelijkingen (9*b*) meer voorkomt; immers moet

$$(p_{1,0}, p_{2,0} - \chi_2) = 0,$$

of

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} = 0$$

zijn, waaruit blijkt, dat x_1 niet meer in χ_2 voorkomt. Evenzoo voor χ_3, enz.

De $m - 1$ vergelijkingen (9*b*) vormen op zich zelf een bijzonder involutiestelsel, met één vergelijking en één onafhankelijke veranderlijke minder dan het gegeven stelsel. Een volledige integraal (zonder x_1 en $p_{1,0}$) van (9*b*) is tevens een volledige integraal van het geheele stelsel (9); want uit

$$p_{2,0}\, d\, x_{2,0} + ... + p_{n,0}\, d\, x_{n,0} = d\, M + P_2\, d\, (p_{2,0} - \chi_2) + ...$$
$$.... + P_m\, d\, (p_{m,0} - \chi_m) + P_{m+1}\, d\, X_{m+1} + ... + P_n\, d\, X_n$$

volgt onmiddellijk

Digitized by Google

$$p_{1,0}\,dx_1 + p_{2,0}\,dx_{2,0} + \ldots + p_{n,0}\,dx_{n,0} = d(M + p_{1,0}x_1) - x_1 dp_{1,0} + \\ + P_2\,d(p_{2,0} - \chi_2) + \ldots + P_m\,d(p_{m,0} - \chi_m) + \\ + P_{m+1}\,d\,X_{m+1} + \ldots + P_n\,d\,X_n;$$

dus als

$$M = \text{standv.}, \qquad X_{m+1} = \text{standv.}, \qquad X_n = \text{standv.}$$

een volledige integraal van (9*b*) is, dan is

$$M + p_{1,0}x_1 = \text{standv.}, \quad X_{m+1} = \text{standv.}, \quad X_n = \text{standv.}$$

een volledige integraal van (9); maar in de eerste vergelijking mag men $p_{1,0}x_1$ weglaten, omdat volgens (9*a*) $p_{1,0}$ nul wordt; dan is deze volledige integraal dezelfde als de voorgaande.

De aldus gevonden volledige integraal is, na invoering der oorspronkelijke veranderlijken, een volledige integraal van (7).

Op dezelfde manier gaat men voort, steeds het aantal vergelijkingen en het aantal onafhankelijke veranderlijken met één verminderende, totdat men komt tot één vergelijking met $n - m + 1$ onafhankelijke veranderlijken, waarvan de volledige integraal tevens die van (7) is.

3. *Invoering der aanvankelijke waarden.*

De bovenstaande methode gaat door, van welke volledige integraal men ook uitgaat; kiest men echter die, welke door de methode van Cauchy geleverd wordt, dan zijn $z, x_m + 1, \ldots x_n, p_2, \ldots p_n$ zoodanige functies van $z_0, x_{m+1,0}, \ldots \ldots x_{n,0}, p_{2,0}, \ldots p_{n,0}$ en x_1 (bovendien van $x_2, \ldots x_m$), dat zij door de substitutie $x_1 = \gamma$ in $z_0, x_{m+1,0}, \ldots x_{n,0}, p_{2,0}, \ldots p_{n,0}$ overgaan. Hierdoor wordt de vorming van het stelsel (9) gemakkelijk gemaakt; want, daar in (9) x_1 niet voorkomt, mag men beginnen, én in (7*b*) én in de substitutie, aan x_1 een willekeurige waarde te geven; dit kan op de uitkomst geen invloed uitoefenen. Kiest men hiervoor de bovengenoemde waarde γ, dan gaat (7*b*) door de substitutie over in

$$p_{2,0} - \Phi_{2,0} = 0, \ldots . p_{m,0} - \Phi_{m,0} = 0,$$

wanneer wij $\Phi_{2,0}, \ldots \Phi_{m,0}$ schrijven voor de functies $\Phi_2, \ldots \Phi_m$,

Digitized by Google

waarin men $x_1, x_{m+1}, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n$ door $\gamma, x_{m+1}, 0, \ldots x_{n,0}$, $p_{m+1,0}, \ldots p_{n,0}$ vervangen heeft. Hierdoor is het dus mogelijk, niet alleen (9*b*), maar alle volgende stelsels in eens op te schrijven.

In het bijzonder geval, dat $\varphi_{2,0}, \ldots \varphi_{m,0}$ alle nul worden, is de integratie in eens geëindigd; want dan zou de volledige integraal van het komende stelsel

$$p_{2,0} = 0, \ldots . p_{m,0} = 0$$

(en dus ook die van het door $p_{1,0} = 0$ voltallig gemaakte stelsel) zijn

$$x_{m+1,0} = \text{standv.}, \ldots . x_{n,0} = \text{standv.},$$

zooals blijkt uit

$$p_{2,0}\, dx_{2,0} + \ldots + p_{n,0}\, dx_{n,0} =$$

$$= d(p_{2,0} x_{2,0} + \ldots + p_{m,0} x_{n,0}) - x_{2,0}\, d p_{2,0} - \ldots - x_{m,0} d p_{m,0} -$$

$$- p_{m+1,0}\, d x_{m+1,0} - \ldots - p_{n,0}\, dx_{n,0};$$

maar deze volledige integraal is, na invoering der oorspronkelijke veranderlijken, dezelfde als die van (7*a*), waarin $x_2, \ldots x_m$ standvastig genomen zijn, zoodat men in dit geval, zoodra (7*a*) geïntegreerd is, de volledige integraal van het stelsel heeft.

4. *Integratie van een bijzonder involutiestelsel, door middel der integratie van één vergelijking.*

Het zoo even genoemde, schijnbaar zeer bijzondere, geval kan tot het algemeene gemaakt worden, door de tangentiale transformatie (8) niet onmiddellijk op het gegeven stelsel (7) uit te voeren, maar op een stelsel, dat men door de volgende nieuwe tangentiale transformatie uit (7) afleidt (III. 7)

$$x_2 = a_2 + (x_1 - \gamma)\, x'_2, \ldots x_m = a_m + (x_1 - \gamma)\, x'_m, \quad (10a)$$

waarbij $a_1, \ldots a_m, \gamma$ willekeurige rekenkundige waarden hebben, terwijl $x_1, x_{m+1}, \ldots . x_n$ onveranderd blijven; hieruit krijgt men verder (terwijl $p_{m+1}, \ldots . p_n$ onveranderd blijven)

$$p_2 = \frac{p'_2}{x_1 - \gamma}, \ldots . p_m = \frac{p'_m}{x_1 - \gamma}, \; p_1 = p'_1 - \frac{x'_2 p'_2 + \ldots . + x'_m p'_m}{x_1 - \gamma}. \quad (10b)$$

Hierdoor gaat (7) over in het nieuwe volledige stelsel

Digitized by Google

$$p'_1 - \frac{x'_2 p'_2 + \ldots + x'_m p'_m}{x_1 - \gamma} - \Phi'_1 = 0,$$

$$\frac{p'_2}{x_1 - \gamma} - \Phi'_2 = 0, \ldots \frac{p'_m}{x_1 - \gamma} - \Phi'_m = 0,$$

dat dus, volgens XIII, 6, evenals (7), een volledige integraal heeft. Maar dan heeft ook het volgende stelsel, dat uit het vorige stelkundig afgeleid wordt, een volledige integraal

$$p'_1 - \Phi'_1 - x'_2 \Phi'_2 - \ldots - x'_m \Phi'_m = 0,$$
$$p'_2 - (x_1 - \gamma)\Phi'_2 = 0, \ldots p'_m - (x_1 - \gamma)\Phi'_m = 0; \quad (11)$$

daar dit stelsel den vorm heeft van een involutiestelsel, moet aan de bekende voorwaarden identiek voldaan worden; (11) is dus een bijzonder involutiestelsel.

Dit nieuwe stelsel (11) heeft de verlangde eigenschap; de eerste leden van alle vergelijkingen, behalve van de eerste, herleiden zich, bij de substitutie $x_n = \gamma$, tot één term $p'_{i,0}$.

5. *Methode van* Lie.

De methode van Lie, om een bijzonder involutiestelsel te integreeren, is dus de volgende.

Pas op dit stelsel (7) eerst de tangentiale transformatie (10) toe; hierdoor gaat het stelsel over in (11), dus in

$$p'_1 - \Phi'_1 - x'_2 \Phi'_2 - \ldots - x'_m \Phi'_m = 0$$

en $m - 1$ andere vergelijkingen. Zoek, volgens de methode van Cauchy, een volledige integraal van deze vergelijking, $x'_2, \ldots x'_m$ als standvastig beschouwende; d. i. neem die integralen van het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen, welke men verkrijgt door als standvastigen te gebruiken de waarden, die $x'_{m+1}, \ldots x'_n, p'_{m+1}, \ldots p'_n$ voor $x_1 = \gamma$ aannemen; de eerste helft van deze integralen vormen, met $z' =$ standv., de gezochte volledige integraal. Voer daarna in deze volledige integraal de transformatie (10) omgekeerd uit; dan heeft men de volledige integraal van (7) verkregen, waarin nog $a_2, \ldots a_m$ als rekenkundige standvastigen voorkomen.

Digitized by Google

6. *Methode van* LIE *voor één vergelijking.*

Door het bovenstaande wordt de integratie van een bijzonder involutiestelsel tot die van één vergelijking herleid. Maar ook voor de integratie van één vergelijking heeft LIE een methode gegeven. Zij die vergelijking

$$p_1 - \phi_1 = 0.$$

Men begint, evenals bij de methode van JACOBI (XIV, 4), één oplossing te zoeken van

$$(F, p_1 - \phi_1) = 0,$$

of één integraal van het hulpstelsel; zij deze integraal $H_1 = a_1$; dan herleidt men (XIV, 5)

$$p_1 - \phi_1 = 0, \qquad H_1 = a_1,$$

tot een nieuw bijzonder involutiestelsel

$$p_1 - \psi_1 = 0, \qquad p_2 - \psi_2 = 0;$$

de volledige integraal van dit stelsel, die nog de standvastige a_1 bevat, is, met $H_1 = a_1$ samen, de gezochte integraal.

Om de integraal van dit stelsel te vinden, herleidt men het weer eerst tot één vergelijking met $n - 1$ onafhankelijke veranderlijken. Enz.

Telkens wordt dus één vergelijking tot een involutiestelsel van twee vergelijkingen, en dit stelsel weer tot één vergelijking, met een onafhankelijke veranderlijke minder, herleid; op de manier van § 5, als het een bijzonder; op die van § 1, als het een algemeen involutiestelsel is.

7. *Opmerking.*

In XIV, 4 is bewezen, dat een stelsel, hetwelk integreerbaar is, tot een involutiestelsel te herleiden is; in § 1 en 2 van dit hoofdstuk vindt men het bewijs van het omgekeerde, namelijk, dat elk involutiestelsel een volledige integraal heeft. Bij dit bewijs wordt alleen gebruik gemaakt van de, door de methode van CAUCHY verkregen, uitkomst, dat elke vergelijking een volledige integraal heeft; niet van de eigenschappen der lineaire vergelijkingen. Overigens hebben wij vroeger reeds het bestaan eener volledige integraal voor alle volledige stelsels bewezen (XIII, 6), waartoe de involutiestelsels als bijzonder geval behooren.

Digitized by Google

ZESTIENDE HOOFDSTUK.

Geschiedkundig overzicht.

---

1. Lagrange.

Lagrange is de eerste geweest, die zich met de algemeene theorie der gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen van de eerste orde bezig gehouden heeft. Van hem afkomstig zijn de afleiding van zulk een vergelijking uit hare volledige oplossing; de onderscheiding van volledige, algemeene en afzonderlijke oplossing (1774); de integratie der lineaire vergelijkingen (1785); het terugbrengen der integratie van een niet-lineaire vergelijking tot die eener lineaire, ten minste voor twee onafhankelijke veranderlijken (1772).

Daar hij slechts de volledige oplossing in één vergelijking kende, had bij hem de lineaire vergelijking geen volledige, maar slechts een algemeene, oplossing.

2. *Methode van* Lagrange—Jacobi.

Wij zullen een uiteenzetting geven der methode van Lagrange om de integratie van een niet-lineaire vergelijking tot die van een lineaire terug te brengen, zooals zij door Jacobi voor meer dan twee onafhankelijke veranderlijken is uitgebreid, ons bepalende tot het geval, dat z niet expliciet voorkomt.

Digitized by Google

Het integreeren van

$$X = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarbij X een functie van de x, p is, komt neer op het vinden van zoodanige waarden voor de p, als functies van de x, en van $n-1$ standvastigen, dat aan (1) voldaan wordt en dat tevens

$$dz - \Sigma p\, dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

integreerbaar wordt; hiervoor moeten tusschen de p de volgende betrekkingen bestaan

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}; \qquad (i, k = 1, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

terwijl uit (1), die, na substitutie der waarden van de p, identiek wordt, volgt

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} + \frac{\partial X}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_i} + \ldots . + \frac{\partial X}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_i} = 0. \quad . \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial X}{\partial x_1} &= \frac{\partial X}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_1} + \ldots . + \frac{\partial X}{\partial p_n}\frac{dp_1}{dx_n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\frac{\partial X}{\partial x_n} &= \frac{\partial X}{\partial p_1}\frac{dp_n}{dx_1} + \ldots . + \frac{\partial X}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_n}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

maar volgens IX, 7 zijn de integralen van dit stelsel tevens de integralen van het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X}{\partial p_1}} = \ldots . = \frac{dx_n}{\frac{\partial X}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial X}{\partial x_1}} = \ldots . = \frac{-dp_n}{\frac{\partial X}{\partial x_n}}. \quad (6)$$

Hieruit vindt men $x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n$ als functies van x_n en $2n-2$ standvastigen (lettende op (1)); daarna vindt men uit (2) z in dezelfde grootheden uitgedrukt, door een quadratuur, waarbij een nieuwe standvastige ingevoerd wordt.

3. *Methode van* Lagrange.

Lagrange heeft zich bepaald tot het geval van twee onafhankelijke veranderlijken; dan herleidt zich het stelsel (5), waar-

Digitized by Google

van altijd één vergelijking van de overige afhankelijk is, tot één vergelijking

$$-\frac{\partial X}{\partial x_1}=\frac{\partial X}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_1}+\frac{\partial X}{\partial p_2}\frac{dp_1}{dx_2}, \quad . \quad . \quad (5')$$

waarvan de integratie tot die van

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial X}{\partial p_2}}=\frac{-dp_1}{\frac{\partial X}{\partial x_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

teruggebracht wordt; hierbij heeft men niet de moeilijkheid, een lineair stelsel van den vorm (5) te moeten integreeren, met verschillende functies in de verschillende vergelijkingen, hetgeen eerst later (1827) door JACOBI volvoerd is. Bovendien heeft men het voordeel, dat uit (5) en (4) weer (3) volgt; zoodat men zeker is, dat een willekeurige integraal van (6'), met (1) samen, waarden van p_1 en p_2 geeft, die (2) integreerbaar maken.

5. *Vervolg der methode van* LAGRANGE—JACOBI.

JACOBI heeft (1827) de methode van LAGRANGE uitgebreid op vergelijkingen met een willekeurig aantal onafhankelijke veranderlijken, op de wijze in § 2 uiteengezet; hierbij doet zich de zwarigheid voor, dat de gezochte $p_1, \ldots p_{n-1}$ wel uit de integralen van (6) te vinden zijn; maar dat niet omgekeerd elke integraal waarden der p geeft, die (2) integreerbaar maken. Daarom voert JACOBI de standvastigen der integratie van (6) als nieuwe veranderlijken in (welk denkbeeld aan LAGRANGE ontleend is), in plaats van $x_1, \ldots . x_{n-1}$, $p_1, \ldots . p_{n-1}$, terwijl x_n blijft en p_n uit (1) gevonden wordt.

Hierdoor gaat $dz - \Sigma p\, dx$ over in (volgens XI, 2)

$$N(C_1\, du_1 + \ldots . + C_{2n-1}\, du_{2n-1}), \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarbij x_n alleen in N voorkomt. De integratie is nu teruggebracht tot het nul maken van deze uitdrukking door niet meer dan n betrekkingen, m. a. w. tot de integratie der totale differentiaalvergelijking

$$C_1\, du_1 + \ldots . + C_{2n-1}\, du_{2n-1} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

een vraagstuk, dat behoort tot het problema van PFAFF.

Digitized by Google

5. *Problema van* PHAFF.

Dit is het volgende.

Als gegeven is een differentiaaluitdrukking

$$X_1 d x_1 + \ldots . + X_n d x_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarbij $X_1, \ldots . X_n$ functies van n onderling onafhankelijke grootheden $x_1, \ldots . x_n$ zijn, vraagt men, door het invoeren van nieuwe veranderlijken, deze uitdrukking tot een dergelijke met een differentiaal minder te herleiden.

PHAFF heeft bewezen (1814), dat deze herleiding altijd mogelijk is, als n even is, en dat hiervoor noodig is de volledige integratie van een stelsel van $n - 1$ gewone differentiaalvergelijkingen; een der x en de standvastigen der integratie worden als nieuwe veranderlijken aangenomen. Als n oneven is, beschouwt men x_n voor een oogenblik als standvastig, herleidt $X_1 d x_1 + \ldots . + X_{n-1} d x_{n-1}$ tot een uitdrukking met $n - 2$ termen, en neemt daarna x_n weer veranderlijk. Op deze wijze voortgaande, is het mogelijk, nu n even onderstellende, een uitdrukking (8) te herleiden tot een dergelijke met $\frac{n}{2}$ termen; hiervoor is noodig de integratie van $\frac{n}{2}$ stelsels gewone differentiaalvergelijkingen, die respectief bestaan uit $n - 1$, $n - 3, \ldots . 3, 1$ vergelijkingen.

6. *Methode van* PHAFF.

Op het voorgaande heeft PHAFF de volgende integratiemethode gegrond.

Om een vergelijking

$$X = 0 \quad \text{of} \quad p_n = \Phi_n (z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_{n-1})$$

te integreeren, moet men voldoen aan

$$d z - p_1 d x_1 - \ldots . - p_{n-1} d x_{n-1} - \Phi_n d x_n = 0,$$

of, wat hetzelfde is, aan

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots . - p_{n-1} dx_{n-1} - \Phi_n dx_n + 0.dp_1 + \ldots . + 0.dp_{n-1} = 0. \quad (9)$$

Digitized by Google

Het eerste lid is een differentiaaluitdrukking van de bovengenoemde soort, waarin de veranderlijken zijn $z, x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_{n-1}$, terwijl de coefficienten functies van deze veranderlijken zijn (of standvastig). PHAFF begint met het eerste lid te veranderen in een uitdrukking met een term minder, dus met $2n-1$ veranderlijken; hij moet daartoe integreeren het stelsel

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X}{\partial p_1}} = \ldots . = \frac{dx_n}{\frac{\partial X}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\Sigma p \frac{\partial X}{\partial p}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial X}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X}{\partial z}} =$$

$$\ldots . = \frac{-dp_n}{\frac{\partial X}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X}{\partial z}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

hetzelfde als dat, waartoe JACOBI bij zijne uitbreiding der methode van LAGRANGE gevoerd werd ((10) verschilt slechts in zoover van (5), als deze laatste in de onderstelling gevormd is, dat z niet in X voorkomt). Neemt men nu x_n en de integratie-standvastigen $u_1, \ldots . u_{2n-1}$ als nieuwe veranderlijken aan, dan verandert (9) in

$$N(C_1 \, du_1 + \ldots . + C_{2n-1} \, du_{2n-1}) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

7. *Vergelijking der methoden van* JACOBI—LAGRANGE *en* PHAFF.

Beide methoden, die van JACOBI en die van PHAFF, gaan nu op dezelfde wijze verder; (7) of liever $C_1 \, du_1 + \ldots . + C_{2n-1} \, du_{2n-1}$ wordt herleid tot een uitdrukking met een term minder, zie § 5; zoo gaat men voort totdat men ten slotte komt tot een uitdrukking

$$L_1 \, dF_1 + \ldots . + L_n \, dF_n,$$

waarin de L en F functies van z en de x, p zijn; deze uitdrukking, die, bij substitutie der genoemde functies, identiek in $dz - \Sigma p dx$ overgaat, moet nul worden; zij wordt dit door te stellen

$$F_1 = \text{standv.}, \ldots . F_n = \text{standv.};$$

de hieruit, door eliminatie der p, afgeleide vergelijking is de gezochte volledige oplossing.

Digitized by Google

Hieruit blijkt, dat de methode van LAGRANGE—JACOBI alleen merkwaardig is als uitbreiding der methode van LAGRANGE; maar overigens, naast die van PHAFF, geen recht van bestaan heeft; daar zij deze te hulp moet roepen om tot haar doel te geraken.

8. *Methode van* JACOBI—HAMILTON.

Verder heeft JACOBI de methode van PHAFF verbeterd (1836), door aan te toonen, dat de integratie van het eerste PHAFF'sche hulpstelsel voldoende is, om het eerste lid van (9) tot een vorm met n termen te herleiden; men bereikt dit doel, door als standvastigen der integratie van (10) aan te nemen de waarden, die $x_1, \ldots . x_{n-1}, p_1, \ldots . p_{n-1}$ in de integralen van (10) aannemen, als men aan x_n een bepaalde waarde γ geeft (zie XI, 4). Deze methode wordt die van JACOBI—HAMILTON genoemd, omdat JACOBI zijn denkbeeld om de zoogenaamde aanvankelijke waarden als standvastigen in te voeren aan HAMILTON's verhandeling over dynamica ontleende.

9. *Methode van* CAUCHY.

Belangrijk blijft de in de vorige § besproken methode, omdat zij duidelijker dan eenige andere het nauw verband doet zien tusschen de gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen van de 1ste orde en de kanonische stelsels gewone differentiaalvergelijkingen, die in de dynamica voorkomen.

Overigens verdient deze methode niet den naam van JACOBI—HAMILTON'sche; daar het dezelfde is, althans wat de uitkomst betreft, als die, welke CAUCHY reeds vroeger (1818) langs anderen en meer eenvoudigen weg gevonden had.

Hoofdzaak bij CAUCHY's methode is de invoering der aanvankelijke waarden, een denkbeeld door hem aan de theorie der bepaalde integralen ontleend. Zijne manier om tot het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen te geraken verschilt in beginsel niet van die, welke wij in VI, 2—5 en XI gegeven hebben, hoewel hij zich op meetkundige beschouwingen beroept.

Digitized by Google

10. *Methode van* JACOBI.

In 1838 heeft JACOBI een nieuwe methode gevonden, die terecht zijn naam draagt; eerst in 1862 werd zij door CLEBSCH openbaar gemaakt; terwijl de voornaamste uitkomsten reeds voor dien tijd, onafhankelijk van JACOBI, door LIOUVILLE, BOUR en DONKIN (1854) gevonden waren. JACOBI geeft hierin de beide methoden (V, 2, 3) om een vergelijking zonder z te verkrijgen; en leidt uit de voorwaarden (3), door LAGRANGE voor de integreerbaarheid van (2) aangegeven, andere af, doordat hij de p niet opgelost denkt in de x, maar bepaald door $n-1$ vergelijkingen

$$X_2 = 0, \ldots . X_n = 0;$$

de nieuwe voorwaarden worden

$$(X_i, X_k) = 0,$$

welke gelijkwaardig met de eerstgenoemde blijken te zijn. Vervolgens leert JACOBI een theorema van POISSON (VIII, 4) uit de theorie der storingen tot het vinden van nieuwe integralen der lineaire stelsels, waartoe zijne methode voert, gebruiken.

De voorwaarden, waaraan een stelsel moet voldoen om integreerbaar te zijn, heeft BOUR 't eerst gegeven (1854), met een kleine verbetering door MAYER (1871).

WEILER (1863) en CLEBSCH (1866) hebben de integratie der lineaire stelsels, die men bij de methode van JACOBI verkrijgt, vereenvoudigd.

11. *Methode van* KORKINE, BOOLE *en* MAYER.

In 1868 heeft KORKINE eene methode gegeven om een stelsel te integreeren; hij zoekt een volledige oplossing van één der vergelijkingen, en voert de standvastigen als nieuwe veranderlijken in de overige vergelijkingen in; deze methode verschilt niet van die, welke wij in XV, 2 gegeven hebben; slechts namen wij de volledige integraal, in plaats van de

Digitized by Google

volledige oplossing, om de tangentiale transformatie te vinden. Hierdoor wordt een volledig stelsel van m vergelijkingen met n onafhankelijke veranderlijken voortdurend herleid tot een dergelijk stelsel met één vergelijking en één onafhankelijke veranderlijke minder; totdat men ten slotte neerkomt op één enkele vergelijking met $n-m+1$ onafhankelijke veranderlijken.

De methode van BOOLE (1863) gaat eveneens te werk, maar is alleen voor lineaire stelsels geschikt.

Ook de methode van MAYER (1872) is alleen op lineaire stelsels van toepassing; zij gaat evenals de methode van KORKINE en BOOLE te werk; het bewijs, dat wij in XIII, 2 van de integreerbaarheid der lineaire volledige stelsels gegeven hebben, is niets anders dan de bovengenoemde integratiemethode. Maar bovendien voert MAYER, evenals CAUCHY, de aanvankelijke waarden als integratie-standvastigen in, waardoor het hem mogelijk wordt al de achtereenvolgende stelsels in eens op te schrijven, zooals wij dit in XV, 3 gezien hebben. Eindelijk voert hij nog een geheel andere omvorming van een lineair stelsel uit, dezelfde die wij in XV, 4 leerden kennen, waardoor men de volledige integraal van een stelsel vindt, zoodra men de volledige integraal van één vergelijking kent. Blijkbaar is de methode van MAYER dezelfde als die van LIE; maar alleen voor lineaire stelsels.

12. *Methode van* LIE.

Eindelijk heeft LIE de theorie der gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen algemeener gemaakt, door ook volledige oplossingen, uit meerdere vergelijkingen bestaande, te beschouwen, waardoor het begrip gedeeltelijke differentiaalvergelijking ruimer, dan volgens LAGRANGE, moest opgevat worden; LIE kon nu ook van de volledige oplossing van lineaire vergelijkingen spreken, en kon stelsels beschouwen, waarin vergelijkingen voorkomen, die de p in 't geheel niet bevatten. Hij heeft, door de invoering van het begrip tangentiale transformatie, alle gevallen van het invoeren van nieuwe veranderlijk uit één gezichtspunt leeren beschouwen.

Digitized by Google

Aan de methode van PFAFF wordt door hem het denkbeeld ontleend $dz - \Sigma p\,dx$ terug te brengen tot een uitdrukking met n differentialen; of liever tot een met $n+1$ differentialen, waarvan één gegeven is; LIE leidde uit deze methode de eigenschappen der tangentiale transformatie af, die later langs elementairen weg door MAYER bewezen zijn.

LIE heeft vervolgens de voorwaarden der integreerbaarheid onderzocht van stelsels, ook van die, waarin vergelijkingen zonder de p voorkomen; het begrip algemeen involutiestelsel ingevoerd; en de integratie daarvan tot die van een bijzonder involutiestelsel herleid. De integratie van een bijzonder involutiestelsel wordt tot die eener enkele vergelijking teruggebracht; deze herleiding is dezelfde als die van MAYER. Bovendien geeft LIE nog een methode om met de integratie van deze vergelijking verder te gaan, zoodra men één integraal van het hulpstelsel gewone differentiaalvergelijkingen kent. Wanneer men meerdere zoodanige integralen kent, geeft LIE nog grootere vereenvoudigingen, maar van anderen aard.

Ook heeft LIE opgemerkt, dat, als bij de integratie van één vergelijking, het ongunstigste geval voor de toepassing der methode van JACOBI intreedt, de methode van CAUCHY onmiddellijk de volledige integraal geeft. Hij heeft bewezen, dat dit ook het geval is bij de integratie van een stelsel. Dit is de uitbreiding der methode van CAUCHY.

Digitized by Google

LITERATUUR.

LAGRANGE.	Mémoires de Berlin; 1772, 1774, 1779, 1785.
	(Oeuvres; III, 549–577; IV, 5—108, 585—634; V, 541—562).
	Leçons sur le calcul des fonctions.
	Théorie des fonctions.
POISSON.	Journal de l'école polytechnique; 15^{0} cahier, 281.
PHAFF.	Mémoires de Berlin; 1814, 76—136.
CAUCHY.	Bulletin de la société philomatique; 1819.
	Exercises d'analyse; II, 238—272.
JACOBI.	Crelle's Journal; II, 317—329, 347—357; XVII, 97—162; XXIII, 1—104; LX, 1—181.
	Vorlesungen über Dynamik.
	Comptes rendus; 1840, 529.
BOUR.	Journal de l'école polytechnique; 39^{0} cahier, 148-191.
DONKIN.	Philosophical transactions; 1854, part. I, 71 en 93.
SERRET.	Comptes rendus; LIII, 143—161.
	(Annales de l'école normale; III, 143—161.
WEILER.	Grunert's Archiv; 1859.
	Schlömilch's Zeitschrift; 1863, 1875.
CLEBSCH.	Crelle's Journal; LIX, 190—192; LX, 191—215; LXI, 146—179; LXV, 257—268.
KORKINE.	Comptes rendus; LXVIII, 1460—1464.
IMSCHENETSKY.	Grunert's Archiv; L, 278—474.
DARBOUX.	Comptes rendus; LXXIX, 1480—1489; LXXX, 160—164.
	Bulletin mensuel; 1882.

Digitized by Google

Lie.	Mathematische Annalen; V, 145—256; VIII, 215—304; IX, 245—296; XI, 464—557.
	Verschillende verhandelingen in de Göttinger Nachrichten, in de Abhandlungen der Gesellschaft der Wissensch. zu Christiania, en in het Archiv for Mathematik.
Mayer.	Mathematische Annalen; III, 435—452; IV, 80—94; V, 448—470; VI, 162—196; VIII, 304—319; IX, 347—370.
	Göttinger Nachrichten; 1873, 1874.
Boole.	Treatise on differential equations.
Imschenetsky.	Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1^0 ordre. Paris, Gauthier-Villars, 1869.
Graindorge.	Mémoire sur l'intégration etc. Paris, Gauthier-Villars, 1872.
Mansion.	Théorie des équations, etc. Paris, Gauthier-Villars, 1875.

Digitized by Google

STELLINGEN.

I.

De methode van CAUCHY laat een zeer eenvoudige meetkundige verklaring toe.

II.

De beide methoden van JACOBI, om z uit een gedeeltelijke differentiaalvergelijking van de eerste orde te verdrijven, komen in beginsel overeen, de eene met het invoeren van homogene puntcoördinaten, de andere met het invoeren van homogene vlakcoördinaten.

III.

De ware algemeenheid verkrijgt de theorie der gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen van de eerste orde door invoering der connex-coördinaten van CLEBSCH.

IV.

De tangentiale transformaties zijn de eenige een-(eindig-)waardige vlakkentransformaties.

Digitized by Google

V.

De theorie der determinanten is gelijkwaardig met die van een complex talstelsel met meerdere onderling onafhankelijke eenheden.

VI.

De methode van BEZOUT, ter oplossing van een stelsel vergelijkingen van den eersten graad, schiet in enkele gevallen, waar de oplossing mogelijk is, te kort.

VII.

De methode der limieten vereenigt in zich de voordeelen der methoden van LEIBNITZ en NEWTON om de gronden der differentiaalrekening uiteen te zetten.

VIII.

De lineaire substituties om een elliptische integraal tot den normaalvorm te herleiden worden verduidelijkt door de leer der binaire quadratische en biquadratische vormen.

IX.

Het is wenschelijk, de theorie der elliptische integralen te beschouwen in verband met de theorie der vlakke kromme lijnen van den derden graad zonder dubbelpunt.

X.

Behalve de zwaartepunts- en vlakkenintegralen, kunnen er geen integralen bestaan, onafhankelijk van de wet van aantrekking, tusschen de punten van een beweeglijk stelsel.

Digitized by Google

XI.

Het is à priori in te zien, dat het onderzoek der beweging van een vast lichaam om een vast punt tot quadraturen terug te brengen is.

XII.

Tangentiale transformaties verduidelijken de theorie der afzonderlijke oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen der eerste orde.

Digitized by Google